カオスについての統計的モデル推定
Ｌｏｒｅｎｚモデルの例

島田一平　日大原子力研究所
柳田達雄　日大理工学部

カオス力学系の定常統計分布はおおくの場合複雑なものである。そのサポートがフラクタルであったり、分布関数が特異なもであったりする。このような複雑な対象を通常のユークリッド空間に連続的にパラメーターづけできるならば、このような複雑な対象物に対して”近似”という手続きが実行可能になる。すなわち，このようなカオス力学系の定常統計分布についての推定をおこなう．そのために、分布関数の集まりに対してそれらの間に”近さ”を定義する必要がある。分布関数の間の距離として、Ｋｕｌｌｋｂａｃｋ－Ｌｅｉｂｌｅｒ情報量を以下のように定義する、

$$\mathrm{K.L.I.}(p, q) = \int \log(p/q)\,dp\ 。$$

ｐは真の分布、ｑは近似分布である。ｑを変化させて、Ｋ．Ｌ．Ｉ．が最小になるように、最適化された近似分布ｑｃをもとめるというのが、ここでの戦略である。ただし、Ｋ．Ｌ．Ｉ．の計算には、未知の分布ｐによる平均操作が入っているので、このままでは実行できない。そこで、真の分布ｐによる平均を観測データー$\{x_i\}_i$による標本平均で代用する。すなわち、

$$\int \log(q)\,dp \sim (1/M)\sum_{i=1}^{M} \log(q(x_i))\ 。$$

このような標本平均のＭ倍を統計学では分布ｑの（対数）尤度という。したがって、Ｋ．Ｌ．Ｉ．最小の近似は尤度最大の近似におきかわる。

以下の結果は、典型的なカオス力学系の例としてＬｏｒｅｎｚモデルについてこのような尤度最大の原理により定常統計分布の推定を行なっ

た結果である。最適化された分布がどの程度よいものであるかは、２時間相関とエントロピーディケイとをこの分布から計算し実験結果と比較してチェックした。エントロピーディケイについては本研究会での柳田、島田の講演に詳しく述べるのでそちらも参照していただきたい。結論は、２時間相関については非常によい。エントロピーディケイについてはよくない。原因は、最適化すべきモデル分布として２体の相互作用のみを仮定した点にあるようである。このことは、エントロピーディケイという量がカオスの複雑さをあらわす量として２体の相関とは独立の情報を含んでいることを図らずも明らかにしている。エントロピーディケイは重要な量なのである。

最後に、我々が行なった、統計分布の推定という作業がもつ別の意義について述べておく。カオス力学系の定常分布は一般にそれを微細にみればみるほど構造をもっているので、それを完全に現わすには多くの情報量を必要とする。われわれの求めた推定分布ではコード化されたシンボル間の相互作用パラメーターにそれらが圧縮して表現されている。しかも有限個のパラメーターによる近似であるにもかかわらず、対象となる分布のもつ無限の階層構造は保持している点が重要である。つまりフラクタルな対象物に対してのフラクタルなｉｎｔｅｒｐｏｌａｔｉｏｎにそれはなっているのである。

model	$-1.l./M$	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
1	-	1.8810d-01	-	-	-	-	-	-
2	0.67411279	1.6724d-01	5.9404d-02	-	-	-	-	-
3	0.67373511	1.6518d-01	4.9484d-02	2.8535d-02	-	-	-	-
4	0.67367563	1.6484d-01	4.8651d-02	2.4603d-02	1.1339d-02	-	-	-
5	0.67366003	1.6480d-01	4.8465d-02	2.4174d-02	9.3249d-03	5.8105d-03	-	-
6	0.67365752	1.6480d-01	4.8446d-02	2.4099d-02	9.1531d-03	5.0041d-03	2.3268d-03	-
7	0.67365738	1.6480d-01	4.8444d-02	2.4094d-02	9.1350d-03	4.9629d-03	2.1335d-03	5.5786d-04

表１

モデルＬ＝１から７について，最適化された相互作用Ｊｉと平均対数尤度　１．ｌ．／Ｍの値．ここでモデルＬというのはサイト間の距離Ｌまでの２体相互作用を考えたギブス分布

$$P(\{u_i\}_i) = (1/Z)\exp\left(\sum_i \sum_{j=1}^{L} J_j * u_i * u_{i+j}\right)$$

$u_i = +1, -1.$

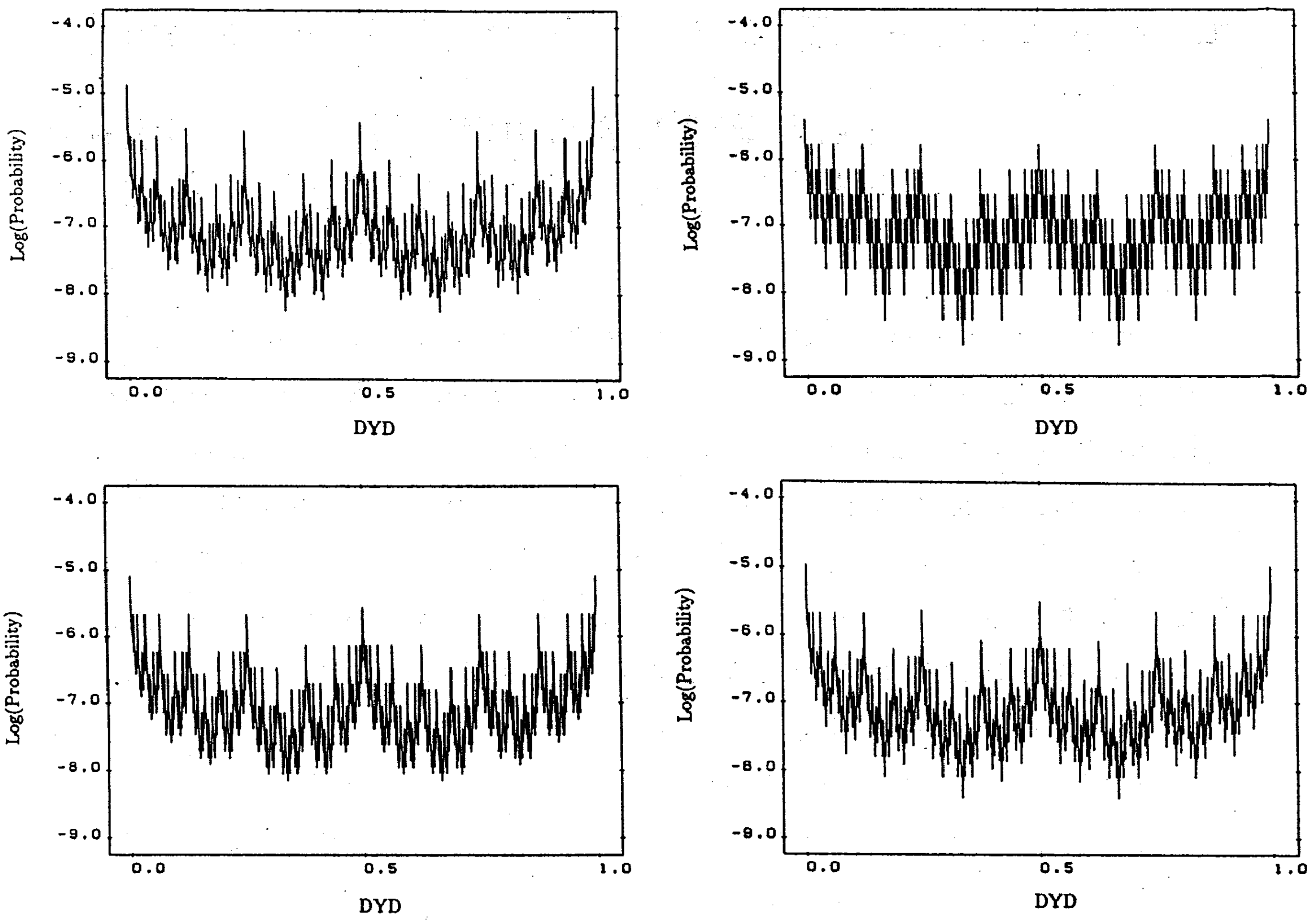

図１

左上から，実験値から得た確率分布，モデルＬ＝１の最適分布，Ｌ＝２，Ｌ＝３．

横軸は１０サイト分のスピンｕｉの配位を現わす２進小数

$$\mathrm{DYD}=\sum_{i=1}^{10}(u_i+1)*2**(-i-1)$$

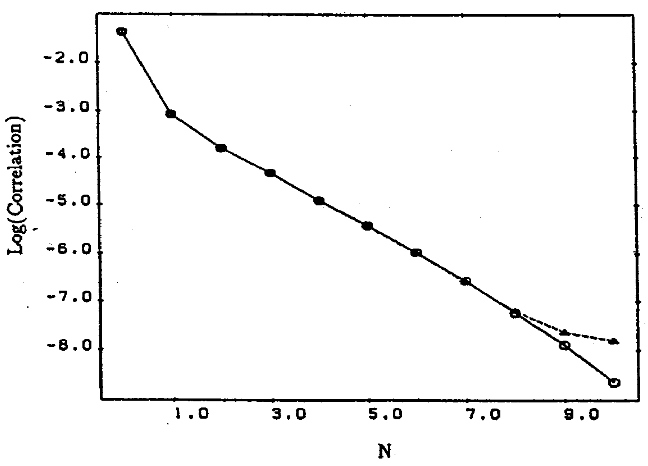

図２

スピン相関関数

○：実験値，△：最適モデルＬ＝７

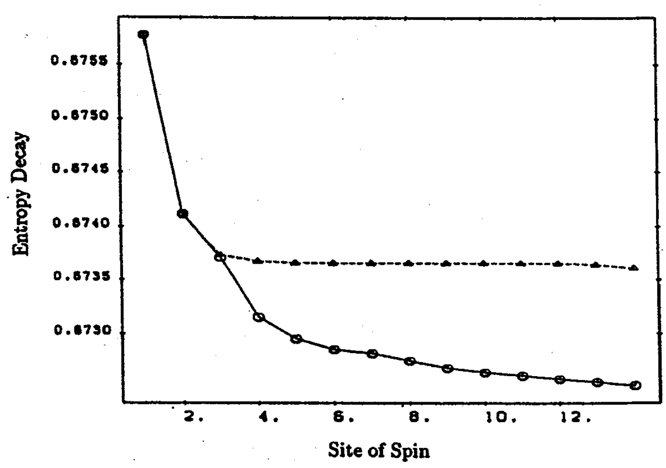

図３

エントロピーディケイ

○：実験値，△：最適モデルＬ＝７