

## 太陽黒点のアトラクター解析と変動の予測

神戸大・理 関雅幸・野村昌信・伊東敬祐

太陽黒点の数は約11年周期で変動することが知られているが、各サイクルの最高値は不規則に変化し、それを予測する経験則が種々提案されている。経験則の存在は、不規則変動の中に何らかの規則性があることを示唆しているのので、我々はこの変動が低次元カオスであるか否かを解析した。使用したデータは、1749年から1980年までの月毎の平均黒点数である。図1にみられるように明らかにノイズと思われる変動が大きい、平滑化を行わずに解析した。

時間遅れによる埋め込みでは、1変数関数  $x(t)$  に対して  $T$  ずつ時間をずらした  $x(t)$ 、 $x(t+T)$ 、 $x(t+2T)$ 、 $\dots$ 、 $x(t+(m-1)T)$  を、あたかも独立変数のようにして多変数化して、 $m$ 次元の相空間に埋め込み、 $t$ を動かしてアトラクターを作る。ここで埋め込んだ相空間上のアトラクターは  $m$ がもとのダイナミクスの次元より大きな値の時は、もとのダイナミクスのアトラクターと幾何学的に同じ性質を持ちフラクタル次元などが一致することが証明されている。

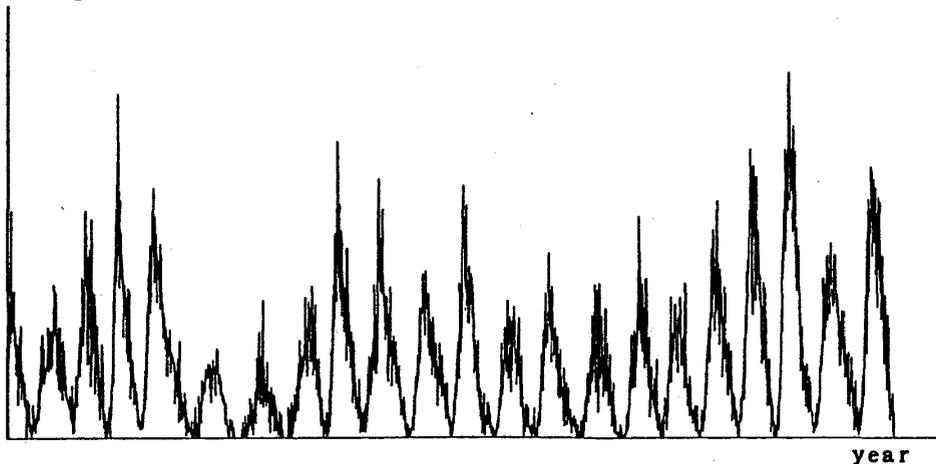
この時間遅れ  $T$  はどのような値でもいいわけではなく  $T$  が小さすぎるともとの軌道より単純になってしまい、また  $T$  が大きすぎるともとの軌道より複雑になってしまう。 $T$  の決め方は、④相互情報量が最初に最小値になるところ⑤自己相関が最初に0になるところが提案されている。太陽黒点の時系列について、④の基準では  $T=6$ 、⑤の基準では  $T=35$  となる。④の相互情報量による基準の方が⑤の自己相関による基準よりも時間遅れが小さくでる傾向がある。

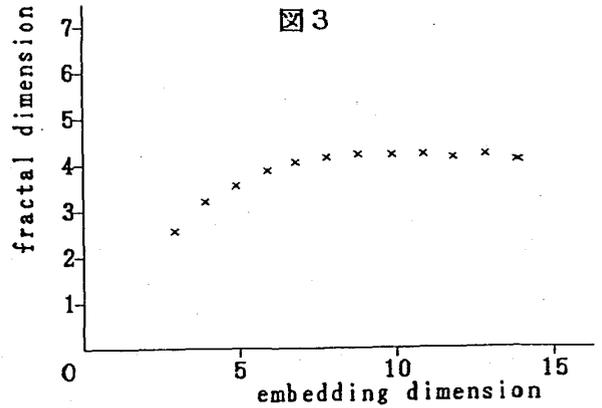
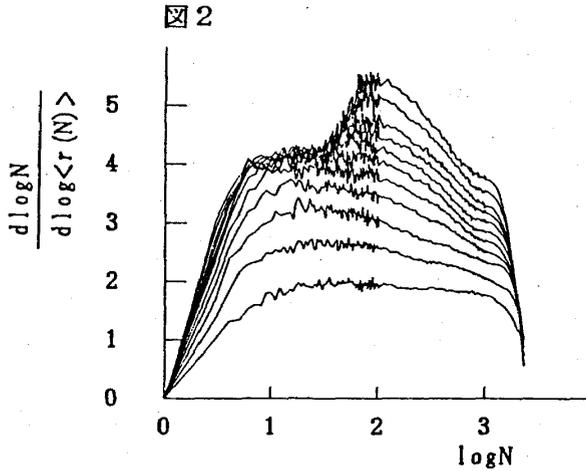
アトラクターのフラクタル次元を求める方法として、GP法 (Grassberger-Procaccia method) とTA法 (Termonia-Alexandrowicz method) がある。

GP法はある1つの点から半径  $r$  の  $m$ 次元球のなかにある点を数えてそれをすべての点を中心として行いその平均の個数  $\langle N(r) \rangle$  を求める。 $\langle N(r) \rangle \propto r^d$  の形になるとき、この  $d$  がフラクタル次元になる。TA法はこれとは逆にある点から残りの点までの距離をすべて求め、すべての点からそれぞれ  $N$  番目に近い点までの距離の平均  $\langle r(N) \rangle$  を求めるというやり方で、 $\langle r(N) \rangle$  と  $N$  の関係  $\langle r(N) \rangle \propto N^{1/d}$  からフラクタル次元を決める。この研究では、TA法の方が、GP法に比べて安定しているので、TA法を用いた。図2は  $T=35$  として埋め込む次元を変えていったときの局所勾配の変化を書いたものである。この図の平らな部分がスケーリング域で、そこでの値がフラクタル次元となる。

monthly average sunspot number

図1





また図3は埋め込んだ次元とフラクタル次元との関係を示したもので、 $\times$ は $T = 35$ としたときのフラクタル次元であり、 $m \geq 8$ で一定の値4.2に収束している。相互情報量による時間遅れ $T = 6$ を使ったときには局所勾配が一定となるスケール領域が存在しなかったため、自己相関による時間遅れ $T = 35$ の方が適当であると判断した。

これらより我々は太陽黒点のアトラクターのフラクタル次元は4.2だという結論をだした。フラクタル次元が4.2であるということは太陽黒点のダイナミクスは自由度5の微分方程式で記述できることを意味する。但しこの方法では具体的なシステムを決定することはできない。

しかしシステムの形がわからなくてもダイナミクスの変動は予測することができる。次にその時系列の予測について述べる。

時系列の予測にはこれまで

(1) 過去の時系列の線形結合で未来を予測する自己回帰 (autoregression) モデル

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_n x_{t-n} + \varepsilon_t$$

(2) 時系列が特徴的な周期 $T_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) を持っているなら

$$x_t = a_0 + \sum (a_k \sin 2\pi t / T_k + b_k \cos 2\pi t / T_k) + \varepsilon_t$$

で表わす周期 (periodic) モデル

等がある。前者は短期的な予測に、後者は長期的な予測に向いている。

太陽黒点の変動時系列については、周期モデルの残差にARモデルをあてはめた予測がなされている。(Sneyers & Cugnon 1986)

もしも、時系列が決定論的な低次元カオスである場合には一見ノイズと見える変動が、ダイナミクスそのものからでてくる可能性がある。この場合には線形のARモデルに変わって、多次元に埋め込んだアトラクターを利用して、非線形モデルを作ることができる。ARモデルの最適な次数はAICによって求められるが、非線形モデルの最適な次元は $m = 2d + 1$ となる。

図1の時系列はあまりにノイズが大きいので最初に平滑化を行った。

以下に述べる時系列の平滑化と予測は埋め込んだアトラクターを利用して、時間発展のオペレーターを局所的に求め、それからのズレをノイズとして除いて平滑化して、その上で予測を行う方法である。太陽黒点の変動の場合アトラクターの次元が4.2であれば、5次元の相空間の中で速度ベクトルはユニークに決まっているといえよう。この場合、理論的な最適次元は9であるが、与えられた時系列が短いために、9次元に埋め込むとノイズをとりきれなくなるので、以下では最低限必要な5次元に埋め込んだアトラクターを利用した。

観測される速度ベクトルは、真の速度ベクトルにノイズが加わっているものなので相空間の中で局所的に平均化を行う。

つまり、観測点 $x_i$ について自分を含めてその近傍の $m$ ヶの点 $x_j(t)$  ( $j = 1 \dots m$ ) を選ぶ。それぞれの次の観測点は $x_j(t+1)$ である。

一方、線形オペレーターを考えて、 $\varphi_i(t+1) = L_i(\varphi_i(t)) = A_i \cdot \varphi_i(t) + B_i$

ただし、 $A_i$  は  $m \times m$  の行列、 $B_i$  は  $m$  次元のベクトルである。ここで  $\sum \|\varphi_i - \varphi_i(t+1)\|^2$  を最小にするように  $L_i$  を求める (Kostelich & York, 1988)。求められた速度ベクトルは観測点上のものに限られているので、内挿によって相空間の中を滑らかにつなぐことができる。但し、太陽黒点の変動の場合は観測点の数が少ないことと、ノイズが大きいために、不安定なので、内挿法はとっていない。

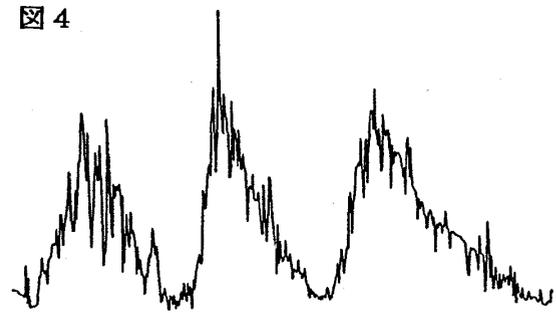
次に予測値が観測値からずれないように平滑化する。Kostelich & York はウィンドウの長さ  $P$  をとって予測値と観測値の差が最小になるように  $\{x_i\}$  を決めて、ウィンドウをずらして行って全体にわたってこれを行うという方法を提案している (Kostelich & York, 1988)。ここでも観測値の数が少ないためにウィンドウを長くすると不安定化するのので、最小の長さ 2 とし、 $\Delta_i = \|\varphi_i - L_{i-1}(\varphi_{i-1})\|^2 + \|\varphi_i - x_i\|^2$  を最小にするように  $\{x_i\}$  を決めた。図 4 はもとの時系列と挿空間で平滑化したものを 1 次元時系列に戻したものの一部である。

次に平滑化したものから予測を行う。Local linear operator  $L$  を内挿することができなかつたので、我々は予測軌道を  $\{x_i\}$ 、 $x_i$  の最隣接点を  $x_{n,n}(t)$  とし  $\Delta_2 = \|\varphi_i - L_i(x_{n,n}(t))\|^2 + \|\varphi_{i+1} - x_{n,n}(t+1)\|^2$  を最小にするように  $\{x_i\}$  を決めた。図 5 はその結果である。(B) のように過去に同じ例があるとよい予測ができるが過去にないと大きくはずれてしまう。通常、カオスのアトラクターの予測は数百、数千本の軌道から行うが、太陽黒点のアトラクターの軌道は近傍に 2 本しかなく、データ数が少ないために、結果として実用的な意味では不安定な方法である。しかし、この方法は、過去の時間変動の記録を多次元のパターンに直して似ているものを捜して未来を予測する点で、人間の経験による予測と似ている点で興味深い。

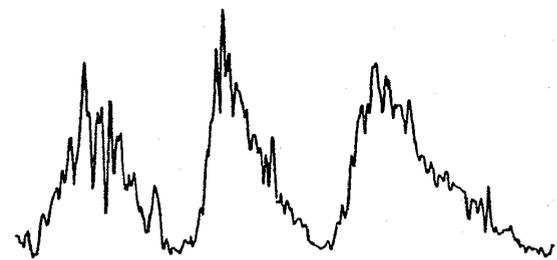
参考文献

E.J.Kostelich and J.A.Yorke, Phys. Rev. A, 38, 1988, 1649-1652  
 R.Sneyers and P.Cugnon, Annales Geophysicae, 4, A, 1, 1986, 81-86  
 M.Casdagli, Physica, D35, 1989, 335-356

図 4

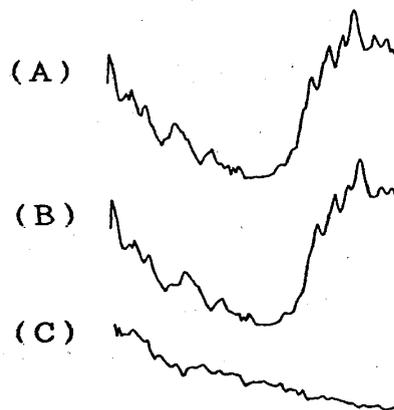


(A) 原時系列



(B) 平滑化された時系列

図 5



(A) 観測値 (平滑化されたもの)  
 (B) (A) を加えたアトラクターを使って予測をした場合  
 (C) (A) を除いたアトラクターを使って予測をした場合