

神経回路網モデルにおけるカオス

東工大 椎野正寿・群馬女短大 深井朋樹

§1. はじめに

生体における神経回路での情報処理は、我々自身が日常経験する複雑な感情の動きや記憶・思考のプロセス等も含めてすべて、単一では興奮・非興奮という二つの状態のみをとるとみられるニューロンが非対称なシナプス結合により互いに相互作用しあっている多自由度系—神経回路網、でくりひろげられる非線形力学現象であるといっておよいだろう。¹⁾出来る限り簡単にしてしかも本質を捉えているモデルを考案し、その力学的性質を調べあげることにより複雑な神経回路の働きの解明にせまることが出来たらと考えるのは、極めて自然な発想であると思われる。この意味で Hopfield 型神経回路網モデルを非対称シナプス結合に拡張したものは、モデル自身が単純化されているという点で(統計)物理学研究者には魅力的でなじみ易いモデルといえることができるかもしれない。しかしこのモデルは、後で述べる様に必ずしも簡単でない力学的挙動を示し得る場合を内蔵しており、興味ある問題点を提起し得るものであることに注意したい。すなわちそれは、非対称結合のために、時間的に振動する状態としてリミットサイクル^{2,3)}のみならずトラスやカオス運動を呈する状態があらわれることである。⁴⁻⁶⁾非周期運動、とりわけカオスのような複雑な力学的挙動が、生体系あるいは人工的な神経回路網での情報処理において果たす役割は一体何であろうか。

この問題はカオス力学系の研究の発展に伴い最近注目を集め始めているのであるが、^{7,8)}生体系におけるカオスの研究としては、これまで単一の神経細胞に外部からの刺激を加えてカオス応答あるいは発振の出現する様子を調べるということがよく行われてきた。⁹⁾最近、ニューロンがネットワークを形成しているような系においてプローブ電極からカオス信号が得られたという例が報告され、その情報処理論的意義が検討され始めている。一つは Freeman 達⁸⁾のグループによる研究で、うさぎの臭球における未知の刺激種投与下でカオス的興奮パターンが生じるというもので、他にも海馬の切片でカオス的発振が見られるということ等があげられる。¹⁰⁾こうしたニューロン素子が多数集まった結合系、いわゆる大自由度の並列分散システムにおいて見られるカオス的挙動の特性、はたまたその生物学的あるいは工学的意義を探る目的で、簡単かつ具体的なモデルに基づいて統一的に行われた理論的研究はまだほとんどないといっておよい。我々は Hopfield 型神経回路網理論の枠組でパターン想起の力学がカオスを示す簡単なモデルを見出し、解析を行ってきたので、^{5,6)}ここにその概要を述べてみたい。

§2. Little ダイナミクス

ここではニューロンを±1の二状態をとる Ising スピンとして扱い、 N 個のニューロンの集まり—ニューラルネットワーク—を考える。ニューラルネットワークを支配する力学としては、離散時間上で同期的に系の状態が一定の確率ルールに従って更新されるという Little ダイナミクスを採用することにする。すなわち各ニューロンは、各時刻においてそれ以前の時刻での状態が与えられた場合の条件付き確率

$$P(S_i(t+1) = \sigma \mid \{S_i(\tau)\}, \tau \leq t) = \frac{1}{2} \{1 + \sigma \tanh \beta H_i(t)\}, \quad (1)$$

に従って状態を更新するのである。ここで局所場 $H_i(t)$ は、ニューロン S_i が他の全てのニューロンより受ける入力重みつき総和 $h_i(t) = \sum_{j \neq i} J_{ij} V_j(t)$ と閾値 d_i との差として、 $H_i(t) = h_i(t) - d_i$ と定義されるもので、 $V_j(t)$ は一般に履歴効果を取り入れることにして、 $V_j(t) = \sum_{u=0}^{\infty} K(u) S_j(t-u)$, $K(u) \geq 0$ で与えられるものとする。従って一般的には Markov 過程にはならない。尚、”温度”の逆数に相当するとみられるパラメータ β が $\beta \rightarrow \infty$ の時、(1)式は $S_i(t) = \text{sgn}(H_i(t))$ となるので、”温度”0に対応して各ニューロンは決定論的な力学に従うところとなり、McCulloch - Pitts モデルに帰着することがわかる。

§3. 非対称シナプス結合 J_{ij} : Hebb ルール ⊗ Dale 仮説

シナプス結合強度 J_{ij} には Hopfield 流に p 個の記憶パターン $\{\xi_i^\mu\}$, $\mu = 1, 2, \dots, p$ を埋め込むのであるが、その際 Hebb の学習ルールの他に一種の神経生理学的拘束条件と考えられる Dale 仮説なるものを導入してみる。Dale 仮説とは「各ニューロンが他のニューロンに送るシナプス結合は、興奮性か抑制性のどちらかにあらかじめ決められている」というもので、以前 Shinomoto¹¹⁾により取り上げられ議論されたものであるが、ここでは Fukai¹²⁾がセパラブルな形に変形したものを扱うことにする。Dale 仮説のため各ニューロンの識別子として $\eta_j (= \pm 1, +1$ は興奮性) を導入することとし、一般的に非対称な行列 $\{A_{\mu\nu} > 0\}$ を用いて、 J_{ij} を

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu, \nu=1}^p \underbrace{A_{\mu\nu} \xi_i^{(\mu)} \xi_j^{(\nu)}}_{\text{Hebb ルール}} \underbrace{(1 + \eta_j \xi_i^{(\mu)} \xi_j^{(\nu)})}_{\text{Dale 仮説}}, \quad (2)$$

の形に仮定する。この選択的学習ルールにより $\text{sgn}(J_{ij}) = \text{sgn}(\eta_j)$ が成立するのがわかる。今、単純化のため $K(u) = \delta_{u,0} + k\delta_{u,1}$ ($k \geq 0$) と仮定すると、局所場 $H_i(t)$ は (2) 式の J_{ij} から簡単な計算で^{5,6)}

$$H_i(t) = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} \xi_i^{(\mu)} (m^{(\nu)}(t) + km^{(\nu)}(t-1)) + \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} (m^{(0)}(t) + km^{(0)}(t-1)) - d_i. \quad (3)$$

と表されることがわかる。ここで $m^{(\mu)}$, $\mu = 1, \dots, p$ は通常のパターンオーバーラップ $m^{(\mu)} \equiv \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^{(\mu)} S_i$ であり、 $m^{(0)}$ は Dale 仮説導入のための識別子 $\{\eta_j\}$ の生成するパターンとのオーバーラップ $m^{(0)} \equiv \frac{1}{N} \sum_i \eta_i S_i$ であるとした。

§4. 熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ とオーバーラップの時間発展方程式

今、閾値 d_i が各ニューロンで皆同じであるとする ($d_i = d$)、状態更新の確率ルールにあらわれる局所場 $H_i(t)$ はニューロン S_i が担っている p 個のパターン $\xi_i^{(\mu)}$, $\mu = 1, \dots, p$ のみで決まることが (3) 式よりわかる。このとき磁性物理学で登場する部分格子の概念を導入し、 $N \rightarrow \infty$ の熱力学極限をとると、「大数の法則」に基づいて非線形マスター方程式の方法が使え、その結果オーバーラップ $m^{(0)}(t)$, $m^{(\mu)}(t)$ についての閉じた時間発展方程式が次のような差分方程式で書けることがわかる。^{5,6)}

$$\begin{aligned} m^{(0)}(t+1) &= (2r_e - 1) \sum_{\xi \in \mathbf{H}^p} r(\xi) \tanh \beta H(\xi, t), \\ m^{(\mu)}(t+1) &= \sum_{\xi \in \mathbf{H}^p} r(\xi) \xi^{(\mu)} \tanh \beta H(\xi, t), \quad \mu = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $H(\xi, t)$ は (3) 式において、 $\xi_i \rightarrow \xi$, $d_i \rightarrow d$ としたものであり、 $r(\xi)$ はパターンのセット $(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}) \in \mathbf{H}^p (= \{+1, -1\}^p)$ が現れる頻度、 r_e は興奮性ニューロンの割合 ($0 \leq r_e \leq 1$) である。 $r_e = \frac{1}{2}$ のとき $m^{(0)} = 0$ となり、方程式は Dale 仮説を仮定しない場合のものに一致することが見て取れる。(4) 式において、 $\beta \rightarrow \infty$ (低温極限) とすると $\tanh \beta(\cdot) \rightarrow \text{sgn}(\cdot)$ であることから ($m^{(0)}(t), m^{(1)}(t), \dots, m^{(p)}(t)$) は有限個の状態しかとり得ないことになり、オーバーラップの時間発展は高々周期運動でしかないことがわかる。一方十分小さな β (高温極限) に対しては $m = 0$ が安定な解となることも容易にわかる。

§5. 雑音誘起によるカオティック・パターン想起

中間の β の値で (4) 式がどのように振舞うかをみるために、2 個のパターンの場合 ($p = 2$) を考えることとし、i) $k = 0$, $d \neq 0$ (Markov)、ii) $k \neq 0$, $d = 0$ (非 Markov) の二つの場合について数値シミュレーションを行って調べてみると、 $\{A_{\mu\nu}\}$, r_e 等のパラメータを適当に選んだとき、 β の変化に伴い、インターミッテンス、トーラス崩壊等のルートを経て生成されるカオスの存在することが見いだされた。一般にカオスを特徴付けるものの中で最も重要なことは軌道拡大率が 1 より大となることで、これは最大 Lyapunov 指数が正の値をとることである。またさらに全ての Lyapunov 指数の組、すなわち Lyapunov スペクトラムを知ることが出来れば Lyapunov 次元 d_L が

計算でき、フラクタルアトラクターの相関次元 d_G の目安とすることができる。(4) 式のような差分系に対してはその Jacobian 行列で線形変換されたベクトルの規格直交化手続きを繰り返し行うことで Lyapunov スペクトラムを比較的容易に求めることが出来る。その他にもカオスに特徴的なこととして、パワースペクトラムに連続成分が出現すること等が挙げられよう。以下にいくつかの例をあげることにする。

i) $k = 0, d \neq 0$ の場合

○ トーラス (図 1):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r(\xi^{(1)} = 1) = 0.3, r(\xi^{(2)} = 1) = 0.7, d = 0.5, r_e = 0.45, \beta = 3.35。$$

図 1 は $m^{(1)} - m^{(2)}$ 平面への軌道の投影図 (繰り返し回数は 10^5 回、以下同様) である。

○ カオス (図 2):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r(\xi^{(1)} = 1) = 0.3, r(\xi^{(2)} = 1) = 0.7, d = 0.34, r_e = 0.45, \beta = 3.75。$$

Lyapunov スペクトラムは $\lambda_1 = 0.26, \lambda_2 = -1.06, \lambda_3 = -2.58$ であり、これより Lyapunov 次元 d_L は $d_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \simeq 1.25$ で与えられる。図 2 は記憶パターン $\{\xi^{(1)}\}$ 及び $\{-\xi^{(1)}\}$ の近似パターンがカオス的に想起されていることを示している。

○ カオス (図 3):

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r(\xi^{(1)} = 1) = 0.3, r(\xi^{(2)} = 1) = 0.7, d = -0.4, r_e = 0.55, \beta = 3.06。$$

$\lambda_1 = 0.17, \lambda_2 = -2.13, \lambda_3 = -5.46$ であり、従って $d_L \simeq 1.08$ である。 $d < 0$ の下での $r_e > \frac{1}{2}$ という興奮性ニューロン優位の場合に生じるカオスの例である。

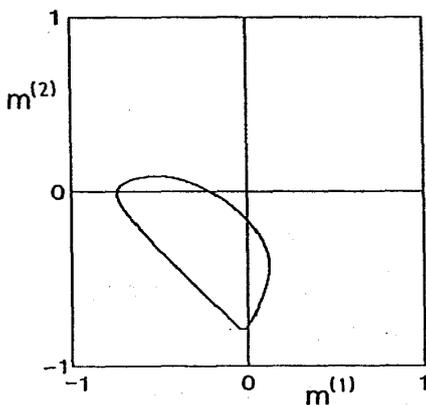


図 1

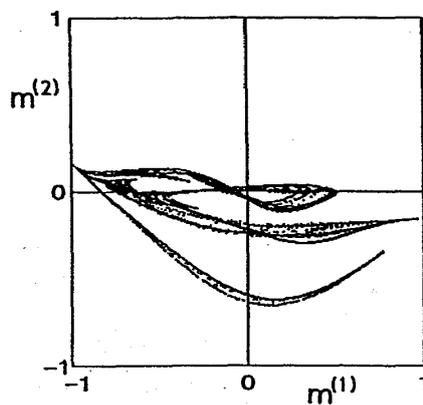


図 2

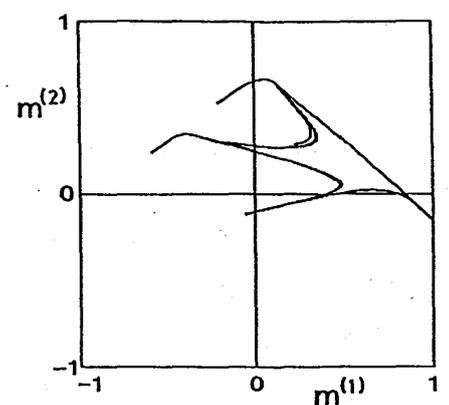


図 3

ii) $k \neq 0, d = 0$ の場合

○ カオス (図 4):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r(\xi^{(1)} = 1) = 0.3, r(\xi^{(2)} = 1) = 0.7, k = 0.8, r_c = 0.24, \beta = 2.95.$$

最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.26$ である。図 4 b は 8192 点の時系列より FFT で計算した $m^{(1)}(t)$ の Fourier パワー・スペクトラムを示す。

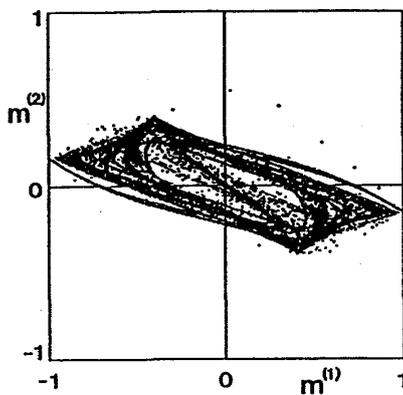


図 4 a

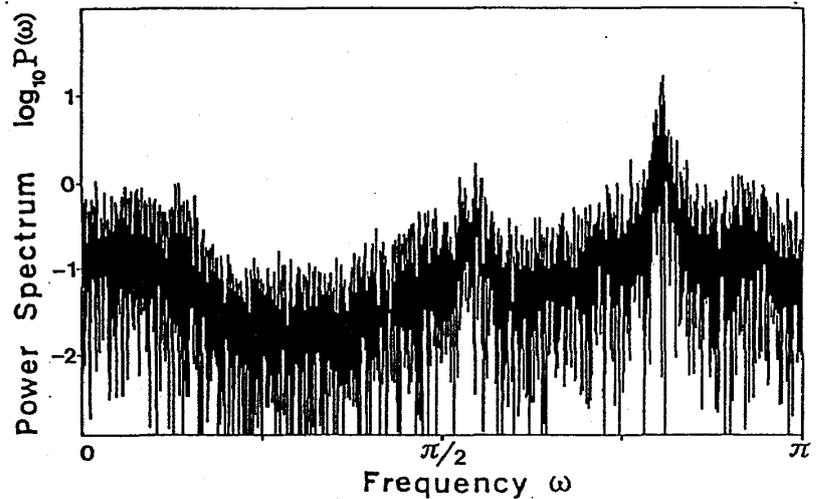


図 4 b

我々は有限個のパターンしか埋め込まれていない系を扱っているので、上に述べたようなカオスは有限の β 、すなわち有限の温度領域でのみ現れるものである。神経回路網が雑音のため確率的動作をしているときに限りカオスが生じ得るということで、雑音誘起のカオティック・パターン想起と呼ぶことが出来よう。

§ 6. 終わりに

磁性物理学における統計力学に酷似した手法により神経回路網モデルにおける統計力学を試みてみた。相互作用 J_{ij} が非対称性を有しているということで、これはまさに非平衡統計力学と呼ぶにふさわしいものであろう。このとき”温度”に関係した β の変化に伴うオーバーラップ (オーダーパラメーターである) の示す分岐現象は非平衡相転移ということになろう。非平衡相転移に伴うオーダーパラメーターのゆらぎ現象も興味ある問題である。¹³⁾

本研究では Dale 仮説をシナプス結合に取り入れたモデルを採用したのであるが、少数個の埋め込みパターンを扱う限り、Dale 仮説を仮定しない系 ($r_c = \frac{1}{2}$) に対しては数値シミュレーションの結果の範囲内でカオスが出現しにくいという事情がある。従って Dale 仮説導入に依存した方程

式(4)の形がカオス発生のメカニズムにどの様に関係しているのか、またこのことと関連してパラメータ空間の中でどの程度広い領域がカオスを生じせしめるのか等の問題について調べることは重要な課題となるであろう。特に抑制性ニューロンの割合($1-r_e$)と閾値 d との関連において、抑制作用の働きがカオスの生成にどのような役割を果たしているのか見ることは興味深いことである。またここでは Little ダイナミクスを仮定してパターン数が2の場合を扱ったが、多数のパターンが埋め込まれている場合(p/N 有限の場合も含む)、さらに同期的な Little ダイナミクスを連続時間の Glauber ダイナミクスに置き換えた場合にどのような振舞いが見られるかも興味ある問題であり、現在調べているところである。

生体の神経回路網で生ずるある種のリズムパターンの乱れに対応した病理現象に本研究のようなアプローチがどの程度関連を持ち得るかということ考察の上でも、今後こうした方向の研究が発展することを期待したいと思う。

参考文献

- 1) 甘利 俊一, 神経回路網の数理, 産業図書 (1978);
合原 一幸, ニューラルコンピューター, 東京電機大学出版 (1988);
相沢 洋二・永井 義則, 物性研究 50 巻第 4 号, 603 (1988).
- 2) H.Sompolinsky and I.Kanter, Phys. Rev. Lett. 57, 2861 (1986).
- 3) M.Shiino, H.Nishimori and M.Ono, J. Phys. Soc. Jpn 58, 763 (1989);
H.Nishimori, T.Nakamura and M.Shiino, Phys. Rev. A41 in press.
- 4) H.Sompolinsky, A.Crisanti and H.J.Sommers, Phys. Rev. Lett. 61 259 (1988).
- 5) T.Fukai and M.Shiino, preprint.
- 6) M.Shiino and T.Fukai, preprint.
- 7) I.Tsuda, E.Koerner and H.Shimizu, Prog. Theor. Phys. 78 51 (1987);
Y.Mori, P.Davis and S.Nara, J. Phys. A22, L525 (1989);
奈良 重俊・P.Davis, 数理科学 1989 年 5 月号.
- 8) C.A.Sakarda and W.J.Freeman: Behavior and Brain Sciences 10 161 (1987).
- 9) H.Hayashi, S.Ishizuka, M.Ota and K.Hirakawa: Phys. Lett. 88A 435 (1982).
- 10) 林 初男, 1989 年秋 日本物理学会講演
- 11) S.Shinomoto, Biol. Cybern. 57 197 (1987).
- 12) T.Fukai, J. Phys. A in press.
- 13) M.Shiino, J. Stat. Phys. in press.
- 14) H.Mori, Prog. Theor. Phys. 63 1044 (1980).
- 15) G.Benettin, L.Galgani, A.Giorgilli and J-M.Strellecyn: C. R. Acad. Sc. Paris 286 431 (1978).