多自由度ハミルトン系における拡散と緩和

名古屋大・理・物理　小西　哲郎
東大・教養　金子　邦彦

Abstract

2自由度および多自由度のハミルトン力学系の拡散過程と緩和過程を結合写像格子系により数値的に調べた．相空間構造が周期性を持っている場合には，大域的緩和過程は自由度によらず拡散過程で表される．拡散過程は通常拡散である．これまで知られていた異常拡散は，短時間においてのみ観測される過渡的な現象である．これは，相空間が完全な自己相似性を持っておらず，自己相似的な“木”構造が並立した“林”構造を持つためである．　多自由度の場合，拡散係数の大きさは，結合定数についておよそ“引き伸ばされた指数関数”に従う．　これは Nekhroshev bound として知られている不等式と一致する．系の大きさを大きくすると，拡散係数が増加する．これはサイズの大きな系では熱力学的な振舞いが早く観測されるであろうという期待を支持するものである．

ハミルトン力学系の研究は，standard mapping

$$
\begin{aligned}
(x,p) &\mapsto (x',p') \\
p' &= p+\frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x), K>0, \\
x' &= x+p'
\end{aligned}
\tag{1}
$$

の様な2次元の写像系で精力的に研究が成され，いくつもの成果が得られてきた．

Standard mapping (1) については，既に次のようなことが分かっている．　これらは，2自由度保測写像系に共通の特徴と考えられている．

1. $K=0$ では系は完全可積分であり，初期条件 $(x,p)=(x_0,p_0)$ から始まる軌道は $x=x_0+p_0t, p=p_0(\mathrm{constant})$ の直線となる．　$K>0$ においても，Kが小さいうちは可積分の時の軌道の幾つかが保存される．(ＫＡＭ軌道)
2. ＫＡＭ軌道が存在するのは $K\leq K_c(=0.97..)$ のときである．
3. ＫＡＭ軌道は，2次元の相空間を2つの不連結な領域に分割する．このことから，結合定数 K の大きさによって，運動量 p の振舞いは定性的に異なることがわかる．　すなわち，$K=K_c$ を境として，$K\leq K_c$ではＫＡＭ軌道に挟まれた有界な領域内で運動し，$K>K_c$ では相空間全体をどこまでも拡散してゆく．
4. 共鳴によって相空間内に生じている楕円型周期点の回りには，“島”と呼ばれる一群の安定軌道が存在する．　この島の周りの楕円型周期点の周りには，高次の共鳴に対応してやはり楕円型周期点とそれを取り巻く“島”が生じてい

る．　すなわち，相空間内には島の自己相似的な系列が生じている．　系はこの自己相似的な構造に捕まりながら運動するので，時系列も自己相似的となり，例えば時間相関は指数的ではなくべき的に減少し，また，運動量の拡散は $(p-p_0)^2 \propto t^{\alpha}, 0<\alpha<1$ という“異常拡散 (anomalous diffusion)”が観測される．

自由度が大きくなると，これらの特徴のうち3番目がかわる．ＫＡＭ軌道は多自由度でも存在するのであるが，ＫＡＭ軌道の載っている多様体（ＫＡＭトーラス）はN次元であり，$N>1$ の時は $2N$次元の相空間を２つにわけることができない．従って，多自由度系では任意の Kの値において大域的拡散が起こる．

系が完全可積分に近いとき，つまり，Kが小さいときにはこの大域的拡散の大きさは小さいことが予測される．この予想は，拡散係数 D に対する次の評価式として表されている；

$$D < D' \exp(-\xi(1/K)^{\beta}), \xi > 0. \tag{2}$$

ここで

$$\beta \propto 1/(\text{polynomial of } N). \tag{3}$$

この不等式 (2) は，Nekhoroshev 不等式とよばれる一般的な表式を用いて導かれる．

この式で $K\to 0$ とすると，拡散係数 D は K のいかなるべきよりも速く 0 に近づいていく．　これは，2自由度系で $D\propto (K-K_c)^{\alpha}, K>K_c, \alpha>0$ であったのとは大きく異なる．

また，式 (3) は，系の大きさを大きくすると拡散係数が大きくなってもよい事を示唆している．これは，大きな系ではより速く統計平衡が実現する可能性を示している．

多自由度系のモデルとしては，結合写像格子系 (coupled map lattice) を用いた；

$$\begin{aligned}
(x_i(t), p_i(t)) &\mapsto (x_i(t+1), p_i(t+1)), \\
p_i(t+1) &= p_i(t) + \frac{K}{2\pi}\Big\{\sin[2\pi(x_{i+1}(t) - x_i(t))] \\
&\quad - \sin[2\pi(x_i(t) - x_{i-1}(t))]\Big\}, \\
x_i(t+1) &= x_i(t) + p_i(t+1), \bmod 1
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$i=1,2,\cdots,N$, 境界条件は周期的 $x_{i+N}=x_i, p_{i+N}=p_i$ にとった．このモデル (4) および先にあげた standard mapping (1) を数値的に調べた．

この二つのモデルでは，x,p を整数だけずらしても x', p'の値が変化しないのが式から読み取れる．　このため，相空間は1辺1の単位胞を周期的に並べた構造となる．

まず，緩和過程を調べた．緩和過程として，“混合性”，すなわち，相空間上の分布関数が熱平衡分布への緩和の様子を調べた [1]．　その結果，混合の速さはこれまで考えられていたように Kolmogolov-Sinai エントロピーで表されるのではなく，拡散係数で表されることが分かった．

この結果は，異常拡散や相空間の自己相似性で代表されるこれまでのハミルトン系の描像と一致しない． そこで，

$$D(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(p_i(t) - p_i(0))^2}{t} \tag{5}$$

という量を測ることで，拡散過程の動的様相を調べてみた． その結果，拡散過程は時間的に次の3つの段階を経て，異常拡散から通常拡散へとクロスオーバーしていることが分かった [2]；

1. $t \sim 1$ ： 初期の強い拡散
2. $t \leq t_c$: 異常拡散 ($D(t) \propto t^{\alpha-1}$)
3. $t > t_c$: 通常拡散 ($D(t) = \text{const.}$)

ここでクロスオーバータイム t_c は，十分時間がたったあとの拡散係数 D とのあいだに

$$t_c \cdot D = |p(t_c) - p(t=0)|^2 = O(0.1) \tag{6}$$

という関係をもつことが見出された． これから，次のような描像ができる； $t < t_c$ では系が相空間の一つの単位胞の中を動いていて，ここでは単一の階層構造のなかにあるので異常拡散をする． ところが，$t > t_c$では，系が別の単位胞に出てしまい，始めとは違う“木”の中に入ってあらたに異常拡散をする．このように異常拡散を乱雑位相で足し合わせてしまうので，全体としては通常拡散となる．

拡散係数の大きさを，式(3)の右辺に従ってフィットし，βを求めてみると，次の様になる；

$D \propto K\exp(-\xi(1/K)^\beta)$					
N	3	4	5	6	128
β	0.7	0.4	0.4	0.4	0.3

すなわち，系の大きさを大きくすることにより拡散が大きくなることが初めて確認された． 一方，$N \to \infty$ でも $\beta \to 0$ とはならなかった． これは Nekhoroshev 不等式からは分からなかった新しい結果である． これは，最近接相互作用している系において空間相関が速く減衰しているために，各サイトの変数 (x_i, p_i) の運動には，全系の自由度の大きさ N そのものは直接反映しないためと考えられる．

参考文献

[1] T. Konishi, "Relaxation and Diffusion in Hamiltonian System with Many Degrees of Freedom",
Progress of Theoretical Physics Supplement No. 98 (1989) pp.19-35, ed. by N. Saitoh and Y. Aizawa

[2] K. Kaneko and T. Konishi
Phys. Rev. A40 (1989) pp.6130 - 6133