物性研究54－1(1990－4)

離散型非線型Schrödinger方程式の二三の新しい解

若竹塾　　成田和明

(1990年3月22日受理)

1973年にAblowitzとLadikは[1]非線型Schrödinger方程式

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\pm|\phi|^2\phi=0 \tag{1}$$

を離散化し，次の離散型非線型Schrödinger方程式を得た。

$$i\dot{\phi}_n+\phi_{n-1}-2\phi_n+\phi_{n+1}\pm|\phi_n|^2(\phi_{n-1}+\phi_{n+1})=0 \tag{2}$$

(2)で＋の符号をとれば引力型，－の符号をとれば斥力型となる。彼らは引力型に対し，無限遠でゼロになるという境界条件の下で逆散乱法を用いて多重ソリトン解を求めている。このノートでは彼らによって求められた解以外の(2)の二三の新しい解を示す。解は(A), (B), (C), からなるが，いずれも(2)を

$$\phi_n=\rho\cdot(g_n/f_n)\cdot\exp(\pm 2\rho^2 it+i\epsilon) \tag{3}$$

(±は(2)と同順)によって変換し，decoupleした次の二つの双一次方程式

$$f_n^2-|g_n|^2=(1\pm\rho^2)(f_{n-1}f_{n+1}-|g_n|^2) \tag{4}$$

$$i(f_n\dot{g}_n-\dot{f}_ng_n)+(1\pm\rho^2)(f_{n-1}g_{n+1}+f_{n+1}g_{n-1}-2f_ng_n) \tag{5}$$

(±は(2)と同順)の解として求めたものである。

(A)　無限遠でゼロでない境界条件の下の1－ソリトン解：

(4), (5)で＋符号をとる。解は

$$f_n=\mathrm{ch}(\varkappa/2)\cos\omega t+\mathrm{ch}(\theta/2)\mathrm{ch}\varkappa n, \tag{16}$$

$$g_n = \mathrm{ch}(\varkappa/2)\cos(\omega t - i\theta) + \mathrm{ch}(\theta/2)\mathrm{ch}\varkappa n, \tag{17}$$

$$\mathrm{ch}\theta = \mathrm{ch}\varkappa + 2\rho^{-2}\mathrm{sh}^2(\varkappa/2), \tag{8}$$

$$\omega = 2\rho^2\mathrm{sh}\theta. \tag{9}$$

(B) Benjamin-Feir 不安定性解：

(4), (5)で＋符号をとる。解は

$$f_n = \cos(\varkappa/2)\mathrm{ch}\,\omega t + \cos(\theta/2)\cos\varkappa n, \tag{10}$$

$$g_n = \cos(\varkappa/2)\mathrm{ch}(\omega t - i\theta) + \cos(\theta/2)\cos\varkappa n, \tag{11}$$

$$\cos\theta = \cos\varkappa - 2\rho^{-2}\sin^2(\varkappa/2), \tag{12}$$

$$\omega = 2\rho^2\sin\theta. \tag{13}$$

ここに

$$\tan^2(\varkappa/2) \leq \rho^2$$

尚(A), (B)の他に２種類以下の箇所で$(-1)^n$を含む「病理的な」解がいくつか存在するが，本質的ではないと思われるのでふれなかった。

(C) 暗いソリトン解：

(1), (2)で－符号をとる。

[C－1] 1－ソリトン解：

$$f_n = 1 + e^{\varkappa n - \omega t}, \tag{14}$$

$$g_n = 1 + e^{\varkappa n - \omega t - i\theta},, \tag{15}$$

$$\cos\theta = \mathrm{ch}\varkappa - 2\rho^{-2}\mathrm{sh}^2(\varkappa/2), \tag{16}$$

$$\omega = 2\rho^2\sin\theta. \tag{17}$$

ここに

$$\mathrm{th}^2(\varkappa/2) \leq \rho^2 \leq 1. \tag{18}$$

[C − 2]　2―ソリトン解：

$$f_n = 1 + \mathrm{e}^{\varkappa_1 n - \omega_1 t} + \mathrm{e}^{\varkappa_2 n - \omega_2 t} + \mathrm{e}^{(\varkappa_1 + \varkappa_2)n - (\omega_1 + \omega_2)t + A_{12}}, \tag{19}$$

$$g_n = 1 + \mathrm{e}^{\varkappa_1 n - \omega_1 t - i\theta_1} + \mathrm{e}^{\varkappa_2 n - i\omega_2 t - i\theta_2} + \mathrm{e}^{(\varkappa_1 + \varkappa_2)n - (\omega_1 + \omega_2)t - i(\theta_1 + \theta_2) + A_{12}}, \tag{20}$$

$$\cos\theta_i = \mathrm{ch}\varkappa_i - 2\rho^{-2}\mathrm{sh}^2(\varkappa_i/2), \tag{21}$$

$$\omega_i = 2\rho^2 \sin\theta_i. \qquad (i = 1,2) \tag{22}$$

やや煩雑な計算の後に位相シフトの因子は次のようになる。

$$\exp A_{12} = N_{12}/D_{12}, \tag{23}$$

$$D_{12} = \rho^2 - \mathrm{sgn}(\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2)(\rho^2 - \mathrm{th}^2\frac{\varkappa_1}{2})^{1/2}.(\rho^2 - \mathrm{th}^2\frac{\varkappa_2}{2})^{1/2} + \mathrm{th}\frac{\varkappa_1}{2} \cdot \mathrm{th}\frac{\varkappa_2}{2}, \tag{24}$$

$$N_{12} = \rho^2 - \mathrm{sgn}(\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2)(\rho^2 - \mathrm{th}^2\frac{\varkappa_1}{2})^{1/2} \cdot (\rho^2 - \mathrm{th}^2\frac{\varkappa_2}{2})^{1/2} - \mathrm{th}\frac{\varkappa_1}{2} \cdot \mathrm{th}\frac{\varkappa_2}{2}. \tag{25}$$

ここで求まった2―ソリトン解が直ちに N-ソリトン解への形式的な拡張を許すかどうか著者には不明である。　（以上）

参　考　文　献

1）　M. J. Ablowitz and J. F. Ladik：Stud. Appl. Math. **55**(1976)213.