物性研究 54－3(1990－6)

修士論文 (1989年度)

低次元フェルミ粒子系の性質

京都大学理学部　藤本　　聡

目 次

§1．序論

近年，酸化物高温超伝導体の発見以来，その機構が関与しているとされる2次元ハバード・モデルやそれに関連したモデルの研究が盛んに行われてきた，P. W. Anderson〔1〕が，2次元ハバード・モデルのhalf-filledにおける基底状態として，非フェルミ液体的なRVB状態を提唱して以来，High T_c の関与する系が，フェルミ液体であるか否かについて盛んに議論がなされてきている．理論と実験の両側面からの精力的な研究は，未だ，確実な結論めいた事項を引き出すには到っていない〔2〕。いうまでもなく，フェルミ液体論は，金属中の多電子系の低励起状態を正しく記述する最も信頼され，かつ，確立された理論の一つであり，Kondo問題〔3〕やheavy fermion〔4〕の解明において最も重要な成果をもたらした。それにもかかわらず，High T_c の問題，2次元ハバード・モデルの問題に対して，その適用に異議が唱えられるのには，主に2つの理由があるよ

うに思える。無論，この２つの理由は，相互に深く関連したものである。第１の点は，系の次元の問題であり，High T_c が関与しているとされる２次元の多電子系がフェルミ液体として適切に記述され得るかどうかという問題である。フェルミ液体論の適用が最初に考えられ，その方法が，功を奏したのは，極低温における ^{3}He に対してであり〔5〕，当然，３次元系として扱われた。２次元や１次元といった低次元における多体問題は，ほとんどの場合，特異な性質をもたらすものである。特に，１次元ハバード・モデルについては，ベーテ仮説による厳密解〔6〕や g-ology〔7〕の側面から盛んに研究がなされてきたが，それらの研究が示している一つの特異な性質は，通常の意味でのフェルミ面が存在しないことである。g-ology〔7〕によれば，相互作用 U の弱い領域で，運動量分布関数は，基底状態においても，$k=k_F$ におけるとびを持つ階段関数とはならず，$k-k_F$ のべきの形であらわされる。Ogata と Shiba〔8〕は，ベーテ仮説による厳密解を用いて，強相関領域においても，この主張が正しいことを示している。

また，Sorella et al〔9〕は，有限系の計算に，スケーリング則を適用して，べきの指数の大きさが Ogata-Shiba と一致することを示している。１次元フェルミ粒子系をフェルミ液体的に扱って，準粒子の減衰を計算しても，通常の温度依存性，すなわち，T^2 に比例した項は得られず，T に比例したものになることは，かなり以前に，Gor'kov と Dzyaloshinskii〔10〕によって指摘されていた。しかし，２次元フェルミ粒子系の基底状態と低励起状態が，どのような理論によって，正しく記述されるかは，今もって重要な研究課題である。

第２の点は，第１の点と非常に密接に関わっているが，half-filled 近くにおける spin fluctuation の効果，あるいは，強相関 U の効果が，系を，非フェルミ液体的なものにしている可能性である。このことは，ハバード・モデルが half-filled において引き起こす金属絶縁体転移，いわゆる，モット転移の近傍における電子状態について，現在のところ，非常にわずかなことしか確かなことが知られていないことによる。２次元系では，half-filled における絶縁体相でさえ，磁気的秩序が存在するかどうかは，決定的な結論は出ていないが，量子モンテ・カルロ〔11〕や，ハミルトニアンの正確な対角化〔12〕等による研究によれば，いずれも反強磁性的な長距離秩序が存在することを支持している。ホールをドープして half-filled からずれた状態について，大きな spin fluctuation や，大きな U が，carrier に対して，どのような影響を及ぼすかは，興味深い問題であり，これまでに多くの試みがなされているが，未だ，確実な結果は乏しい〔13〕。

本論では，上述の２点の内，前者についてのみ考える。既に述べたように１次元系の場合には，フェルミ液体的な取り扱いは，consistent な結論を導かない。準粒子の寿命の逆数，すなわち，自己エネルギーの虚数部が，$\propto T$，あるいは，$\propto \varepsilon$ で与えられるとすると，準粒子のスペクトル関数，すなわち，グリーン関数の留数 $a_{k_F}=0(T=0)$ をも

たらし，出発点であった通常のフェルミ液体的描像と合わなくなる。

2次元ハバード・モデルについては，non-half-filled において，低励起状態がフェルミ液体で記述されるかどうかは，上述のように議論の的である。Anderson〔14〕は，2次元のハバード・モデルが，弱相関領域($U \ll t$)であってもフェルミ液体ではないことを主張している。その論拠は，不十分なものであり，満足のいく議論ではない。彼は $U \neq 0$ である2次元ハバード・モデルは，全て $U \rightarrow \infty$ の領域へと renormalize されることを主張している。もし，そうであるならば，U についての摂動計算は，フェルミ液体としては，異常な結果をもたらす可能性がある。そこで，本論文では，2次元系のフェルミ液体的な取り扱いがどのような結果をもたらすかを見ていくことにする。そのために特に，準粒子のダンピング，運動量分布の $k=k_F$ におけるとび，グリーン関数の留数について，U についての2次までの摂動で計算を行った。通常のハバード・モデルは，tight binding type の band を持っているが，ここでは，特定の場合を除き，自由電子型の分散関係を仮定している。これは全く計算上の便宜によるものに過ぎないが，2次元という低次元性にのみ固有の性質を知るには充分であろう。通常のフェルミ液体では，準粒子のダンピングの温度依存性は T^2 に比例するものとして与えられ，また，フェルミ・エネルギーからのずれ ε に対しては ε^2 に比例するものとして与えられる。このことは，縮退したフェルミ液体に特徴的なフェルミ面の効果によるものである。通常の，位相空間を占める状態の体積を考察する議論〔15〕では，パウリ原理とエネルギー保存から準粒子の寿命が $1/\varepsilon^2$ に比例することが導かれる。この議論では，運動量保存は explicit には考慮されていない〔16〕。パウリ原理によって，散乱に関与する準粒子は，フェルミ面上の厚さ T の皮の中に制限されており，このことが，各準粒子の運動量のなす角度の自由度を制約するので，散乱に関与する準粒子の位相空間における配位を決定する上で，運動量保存は，explicit には役割を果たさなくなる。しかし，この議論は，1次元，2次元などの低次元系では成立しない。1次元系や2次元系では，3次元系と比較して，散乱における空間の自由度がある程度失われる。そのため，散乱される準粒子の終状態をフェルミ面付近から選ぶ上での温度 T の幅の自由度が失われて，3次元系よりも，大きなダンピングが与えられることになる。1次元系において，T に比例する準粒子のダンピングが得られるのは，運動量の角方向の自由度が失われたことによる。

2次元系において，準粒子のダンピング，すなわち，自己エネルギーの虚数部を，相互作用 U についての2次までの摂動で計算すると，通常の T^2 に比例する項の係数は常に，発散していることがわかる。この発散は，実は $\log T$ で評価されるものであり，正しい温度依存性は，$T^2 \ln T$ に比例するものとして与えられる。本論文では，free dispersion の場合についてのみ，示しているが，この結果は，dispersion の形にはよらず，

全ての2次元フェルミ粒子系に共通の性質であろうと思われる。1次元の場合には，$\mathrm{Im}\Sigma \propto |\varepsilon|$ から，$n_{k=k_F}$のとびの喪失が従うが，2次元の場合はどうであろうか。$\mathrm{Im}\Sigma \propto -\varepsilon^2 \ln\frac{\varepsilon}{E_F}$ にもとづいて，運動量分布の $k=k_F$ 付近の様子，グリーン関数の留数を計算した結果，通常のフェルミ面は存在し，フェルミ液体的な描像は consistent に成立していると考えられる。準粒子のダンピングにおいてのみ，異常が顕著にあらわれると思われる。

最後に，以上の結果を踏まえた上で，電子-電子散乱による抵抗の温度依存性について考察した。準粒子のダンピングの温度依存性は，電子-電子散乱による抵抗の温度依存性として，観測される。2次元系において見い出された $\mathrm{Im}\Sigma \propto -T^2 \ln\frac{T}{E_F}$ は，ある特定の散乱過程が，効果的に効くことによってもたらされるものである。電気抵抗を生ずるために必要な Umklapp process について，異常な寄与をする散乱過程は，特定の運動量をもった準粒子にのみ可能である。従って，電気抵抗としては，電気伝導により効果的に寄与する $1/T^2$ に比例する寿命をもった準粒子によるものが主として観測にあらわれることになり，$T^2 \ln\frac{T}{E_F}$ に比例した電気抵抗を観測することはできないことが，結論される。さらに，2次元正方格子での特殊な性質，すなわち，half-filled 近くにおけるフェルミ面のパーフェクト・ネスティングや，状態密度における van Hove singularity の存在が，電子電子散乱による電気抵抗の温度依存性にどのような影響を及ぼすかについて考察した。Half-filled における perfect nesting は，1次元の場合と同じような dispersion を与える。これは，van Hove singularity の寄与を考えない限り，$\mathrm{Im}\Sigma \propto T$ を与える。もし，perfect nesting による，SDW の形成にともなったエネルギー・ギャップがフェルミ面上において開かなければ〔17〕，あるいは，そのギャップの大きさよりも，高温であれば電子-電子散乱による抵抗は T に比例することになる。このことと酸化物高温超伝導体の正常状態における抵抗の温度依存性とを結びつけて議論した論文がいくつかある〔18〕〔19〕。これらに対する批判的な検討も行いたいと思う。

§2では，フェルミ液体論における，自己エネルギーの虚数部と電気伝導率の一般的表式について簡単に述べる。§3～4では，1次元ハバード・モデルのフェルミ液体的な取り扱いがもたらす，種々の結果について述べる。§5～7では，2次元系の準粒子の性質について議論し，その結果を踏まえて，§8～9で2次元系の電気抵抗の温度依存性について考察する。最後に§10で我々が得た結果を要約する。

§2．フェルミ液体論による一般的定式

この節では，フェルミ液体論による，自己エネルギーの虚数部分と伝導率の一般的なformulationについて述べる。次のようなハミルトニアンに基づいて論述する。

$$H = H_0 + H' \tag{2.1}$$

$$H_0 = \sum_{k\sigma} E_k c^{+}_{k\sigma} c_{k\sigma} \tag{2.2}$$

$$H' = \sum_{k',q} \frac{U}{N} c^{+}_{k-q\uparrow}\, c^{+}_{k'+q\downarrow}\, c_{k'\downarrow}\, C_{k\uparrow} \tag{2.3}$$

これは，one bandのハバード・ハミルトニアンをk表示であらわしたものである。相互作用Uは，スピンが逆向きの電子についてのみ働く。

以下の議論はYamada-Yosida〔20〕に依っている。

a）自己エネルギーの虚数部分

自己エネルギーの虚数部分は，準粒子の寿命の逆数である。Pauli principleとエネルギーと運動量の保存則を考慮すると，一般に，$(T/E_F)^2$で準粒子の減衰が特徴づけられることがわかる。Tは温度，E_Fはフェルミ・エネルギーである。このことは，自己エネルギーの虚数部分をUについての2次の摂動計算で求めることによって，知ることができる。以下では，Uの2次までの摂動計算による表式を与える。

ハミルトニアン(2.1)のグリーン関数を$G_k(\varepsilon_n)$ $(\epsilon_n=(2n+1)\pi iT)$として，自己エネルギーは，$U$についての摂動計算の2次で，次式で与えられる。

$$\Sigma_k^{(2)}(\varepsilon_n) = U^2 T \sum_{\varepsilon_n, q} G_{k-q}(\varepsilon'_n)\chi_q^0(\varepsilon_n - \varepsilon'_n) \tag{2.4}$$

$$\chi_q^0(\varepsilon_n - \varepsilon'_n) = -T \sum_{x_m, k'} G_{k'}(x_m) G_{k'+q}(x_m + \varepsilon_n - \varepsilon'_n) \tag{2.5}$$

$$x_m = (2m+1)\pi i T, \qquad \varepsilon'_n = (2n'+1)\pi i T \tag{2.6}$$

準粒子の減衰を得るために，(2.4)を解析接続して，

$$\Sigma_k^R(\boldsymbol{\varepsilon} + i\boldsymbol{\delta}) = -U^2 \sum_q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi} \Big\{ \mathrm{cth}\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2T} G_{k-q}^R(\varepsilon') \mathrm{Im}\chi_q^{0R}(\varepsilon - \varepsilon') - \mathrm{th}\frac{\varepsilon'}{2T} \mathrm{Im} G_{k-q}^R(\varepsilon') \chi_q^{0R}(\varepsilon - \varepsilon') \Big\} \tag{2.7}$$

$$\chi_q^{0R}(\varepsilon) = -\sum_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \Big\{ \mathrm{th}\frac{x}{2T} G_{k'+q}^R(x+\varepsilon) \mathrm{Im} G_{k'}^R(x) - \mathrm{th}\frac{x+\varepsilon}{2T} G_{k'}^R(x) \mathrm{Im} G_{k'+q}^R(x+\varepsilon) \Big\} \tag{2.8}$$

これの虚数部をとって

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(\varepsilon) = U^2 \sum_q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi} \Big[\mathrm{cth}\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2T} - \mathrm{th}\frac{\varepsilon'}{2T} \Big] \mathrm{Im} G_{k-q}^R(\varepsilon')$$

$$\times\sum_{k'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\left[\mathrm{th}\frac{x}{2T}-\mathrm{th}\frac{x+\varepsilon-\varepsilon'}{2T}\right]\mathrm{Im}G_{k'}{}^{R}(x)\mathrm{Im}G_{k'+q}{}^{R}(x+\varepsilon-\varepsilon') \tag{2.9}$$

εについて2次までの展開を求めると

$$\mathrm{Im}\Sigma_{k}{}^{R}(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2U^2}{2\pi^2}\sum_{k'q}\mathrm{Im}G_{k-q}{}^{R}(0)\mathrm{Im}G_{k'+q}{}^{R}(0)\mathrm{Im}G_{k'}{}^{R}(0)$$

$$=-\frac{\varepsilon^2U^2}{2}\sum_{k'q}\rho_{k-q}(0)\rho_{k'+q}(0)\rho_{k'}(0) \tag{2.10}$$

ここで　$\rho_{k}(0)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}G_{k}{}^{R}(0)$　である。

次に T^2 までの展開を求める。$\varepsilon=0$ として，

$$\mathrm{Im}\Sigma_{k}{}^{R}(0)=U^2\sum_{q}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon'}{2\pi}\left[\mathrm{cth}\frac{\varepsilon'}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon'}{2T}\right]\mathrm{Im}G_{k-q}{}^{R}(\varepsilon')$$

$$\times\sum_{k'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\left[\mathrm{th}\frac{x}{2T}-\mathrm{th}\frac{x-\varepsilon'}{2T}\right]\mathrm{Im}G_{k'}{}^{R}(x)\mathrm{Im}G_{k'+q}{}^{R}(x-\varepsilon')$$

$$=\frac{U^2}{2\pi}\sum_{k'q}(\pi T)^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon'}\left[\mathrm{Im}G_{k-q}{}^{R}(\varepsilon')\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\left[\mathrm{th}\frac{x}{2\pi}-\mathrm{th}\frac{x-\varepsilon'}{2T}\right]\right.$$

$$\left.\times\mathrm{Im}G_{k'}{}^{R}(x)\mathrm{Im}G_{k'+q}{}^{R}(x-\varepsilon')\right]_{\varepsilon'=0}$$

$$=\frac{U^2}{2\pi}(\pi T)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\frac{1}{2T\cosh^2\frac{x}{2T}}\sum_{k'q}\mathrm{Im}G_{k-q}{}^{R}(0)\mathrm{Im}G_{k'}{}^{R}(x)\mathrm{Im}G_{k'+q}{}^{R}(x)$$

$$=-\frac{U^2}{2}(\pi T)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2}\frac{1}{2T\cosh^2\frac{x}{2T}}\sum_{k'q}\pi\rho_{k-q}(0)\rho_{k'}(x)\rho_{k'+q}(x) \tag{2.11}$$

$$=-\frac{(\pi T)^2}{2}U^2\sum_{k'q}\pi\rho_{k-q}(0)\rho_{k'}(0)\rho_{k'+q}(0) \tag{2.12}$$

ここで，次の関係式を使った

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon'\left[\mathrm{cth}\frac{\varepsilon'}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon'}{2T}\right]F(\varepsilon')=F'(0)(\pi T)^2 \tag{2.13}$$

(2.10)とあわせて，次の式を得る。

$$\mathrm{Im}\Sigma_{k}{}^{R}(\varepsilon)=-\frac{\varepsilon^2+(\pi T)^2}{2}U^2\sum_{k'q}\rho_{k-q}(0)\rho_{k'}(0)\rho_{k'+q}(0) \tag{2.14}$$

(b)　電気伝導率（Eliashberg〔21〕，Yamada-Yosida〔20〕）

電子間相互作用による電気抵抗の表式を久保公式にもとづいて導出する。久保公式によると電気伝導率は次式で与えられる。

$$\sigma_{\mu\nu}=e^2\sum_{\substack{kk'\\ \sigma\sigma'}}v^*{}_{k\mu}v^*{}_{k'\nu}\lim_{\omega\to0}\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}K_{k\sigma,k'\sigma'}(\omega+i\delta) \tag{2.15}$$

遅延2粒子グリーン関数は2粒子温度グリーン関数を解析接続して得られる。

$$\boldsymbol{K}_{k'\sigma,k'\sigma}(\omega+i\delta)=\tilde{\boldsymbol{K}}_{k\sigma k'\sigma}(\omega) \tag{2.16}$$

準粒子の速度 $v_k{}^*$ は，次式で与えられる。

$$v_k{}^*=\nabla_k E_k{}^*=z_k \nabla_k (E_k+\Sigma_k(0)) \tag{2.17}$$

$$z_k=\left[1-\frac{\partial \mathrm{Re}\Sigma}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=E_k{}^*}\right]^{-1} \tag{2.18}$$

温度２粒子グリーン関数 $\tilde{K}_{k\sigma,k'\sigma}(\omega_m)$ は次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{k\sigma k'\sigma}(\omega_m)=&-T\sum_n G_{k\sigma}(\varepsilon_n+\omega_n)\delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}\\ &-T^2\sum_{nn'}G_{k\sigma}(\varepsilon_n)G_{k\sigma}(\varepsilon_n+\omega_m)\Gamma_{k\sigma k'\sigma}(\varepsilon_n,\varepsilon_{n'};\omega_m)\\ &\times G_{k'\sigma}(\varepsilon_{n'})G_{k'\sigma}(\varepsilon_{n'}+\omega_m)\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\varepsilon_n=(2n+1)\pi iT,\quad \varepsilon_{n'}=(2n'+1)\pi iT$$

これを解析接続して次式を得る

$$\begin{aligned}K(\omega+i\delta)=-\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon\Big[\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}K_1(\varepsilon,\omega)+\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}\right)K_2(\varepsilon,\omega)\\ -\mathrm{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T}K_3(\varepsilon,\omega)\Big]\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$K_l(\varepsilon,\omega)=g_l(\varepsilon,\omega)+g_l(\varepsilon,\omega)\sum_{m=1}^{3}\frac{1}{4\pi i}\int d\varepsilon' T_{lm}(\varepsilon,\varepsilon',\omega)g_m(\varepsilon',\omega) \tag{2.21}$$

$g_l\,(l=1,2,3)$ は次のように与えられる。

$$g_1(\varepsilon,\omega)=G^R(\varepsilon)G^R(\varepsilon+\omega) \tag{2.22}$$

$$g_2(\varepsilon,\omega)=G^A(\varepsilon)G^R(\varepsilon+\omega) \tag{2.23}$$

$$g_3(\varepsilon,\omega)=G^A(\varepsilon)G^A(\varepsilon+\omega) \tag{2.24}$$

T_{lm} は，vertex function $\Gamma_{k\sigma k'\sigma}$ と関係づけられる量である。g_l は $\omega\ll T$ において，次のようにあらわされる。

$$g_1\cong\{G^R(\varepsilon)\}^2=\left(\frac{a_k}{\varepsilon-E_k{}^*+i\delta}\right)^2 \tag{2.25}$$

$$g_3=\{g_1\}^* \tag{2.26}$$

$$g_2=2\pi ia^2\delta(\varepsilon-E_k{}^*)/(\omega+2i\Gamma_k{}^*) \tag{2.27}$$

$\omega\ll T$ のとき，g_l の内，ω に依存するのは g_2 のみである。T_{lm} の内，T_{22} 以外のものは velocity のくり込みを与える。本論文では，velocity の相互作用によるくり込みは全く考慮していないので詳細は省くが，次式によって与えられる

$$\boldsymbol{J}_k=a_k(\boldsymbol{v}_k+\nabla_k\Sigma_k(0))+a_k\sum_{k'}\Gamma_{\sigma\sigma'}(k,k')a_{k'}\delta(\mu-E_{k'}{}^*)\boldsymbol{v}_{k'}{}^* \tag{2.28}$$

T_{22} は，velocity のくりこみには含まれない，vertex correction を与える。これは，Ward 恒等式を用いて，自己エネルギーの虚数部と関係づけられるものである。２次の自己エネ

ルギーが含む３つのグリーン関数の微分に対応して，３つの vertex correction を考慮する必要がある。導出の詳細は，Yamada-Yosida に譲り，結果のみ示す。

$$\boldsymbol{\Lambda}_k(\varepsilon)=\boldsymbol{J}_k+\boldsymbol{\Lambda}_k^{(a)}(\varepsilon)+\boldsymbol{\Lambda}_k^{(b)}(\varepsilon)+\boldsymbol{\Lambda}_k^{(c)}(\varepsilon)$$

$$=\boldsymbol{J}_k+\sum_{k'q}\Delta_0(k, k', k'+q, k-q)\left\{\frac{\boldsymbol{\Lambda}_{k-q}(\varepsilon)}{2\Delta_{k-q}(\varepsilon)}+\frac{\boldsymbol{\Lambda}_{k'+q}(\varepsilon)}{2\Delta_{k'+q}(\varepsilon)}-\frac{\boldsymbol{\Lambda}_{k'}(-\varepsilon)}{2\Delta_{k'}(-\varepsilon)}\right\} \tag{2.29}$$

$$\Delta_0(k, k', k'+q, k-q)=\pi\rho_{k-q}(0)\rho_{k'+q}(0)\rho_{k'}(0)U^2((\pi T)^2+\varepsilon^2)$$

$$\Delta_k=\frac{1}{2}\sum_{k'q}\Delta_0(k, k', k'+q, k-q) \tag{2.30}$$

ここで，$\Lambda^{(a)}$，$\Lambda^{(b)}$，$\Lambda^{(c)}$ はそれぞれ，２次の自己エネルギーに対応する vertex correction である。ここで

$$\vec{\Phi}_k=\frac{\boldsymbol{\Lambda}_k(\varepsilon)}{2\Delta_k(\varepsilon)}=\vec{\Phi}_k(-\varepsilon)$$

とおくと(2.30)は次のように書きかえられる。

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{J}_k+\sum_{k'q}\Delta_0(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})[\vec{\Phi}_{k'+q}+\vec{\Phi}_{k-q}-\vec{\Phi}_{k'}-\vec{\Phi}_k] \tag{2.31}$$

この Φ_k と，(2.15)～(2.28)を使って伝導率は次式で与えられる。

$$\sigma_{\mu\nu}(0)=e^2\sum_k J_{k\mu}\left(-\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)_{x=E_k{}^*}\frac{\Lambda_{k\nu}}{2\Gamma_k{}^*} \tag{2.32}$$

$$=e^2\sum_k\frac{J_{k\mu}}{a_k}\delta(\mu-E_k{}^*)\Phi_{k\nu} \tag{2.33}$$

ここで $f(x)$ はフェルミ分布関数である。

§3．１次元ハバード・モデルの非フェルミ液体的振舞い

１次元という特殊な状況は，フェルミ液体論による準粒子描像が破綻する１つの例を提示する。１次元の場合に，電子-電子散乱による準粒子のダンピングが $(T/E_F)^2$ ではなく，$\propto T$ によって特徴づけられることは，かなり以前に，L. P. Gor'kov と I. E. Dzyaloshinskii (1973) によって指摘された。ここでは，§4以下の議論との比較のために，§2で与えられた定式より，いかに $\mathrm{Im}\Sigma\propto T$ が導かれるかを示す。さらに，準粒子のダンピングのこのような振る舞いは，フェルミ面での運動量分布のとびを消滅させることを示す。

a)　自己エネルギーの虚数部

１次元では，§2の(2.12)によって，T^2 項の係数を求めようとすれば，直ちに困難に陥る。鋭いフェルミ面のとびを運動量分布に持つ，フェルミ液体では，状態密度 $\rho_k(0)$ はデルタ関数 $\delta(\mu-E_k)$ によっておきかえられる。ここで簡単のため，多体効果によるくりこ

みは無視した。1次元では運動量 $\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}$ の積分は，2重積分を与えるに過ぎないが，(2.12)に含まれる3つのデルタ関数を，積分によって消去するには，少なくとも3重積分が必要である。実際，$\boldsymbol{k}'$，$\boldsymbol{q}$ についての積分を実行すればデルタ関数が1つ残り，その引数は $\boldsymbol{k}$ がフェルミ面にある場合に0となる。フェルミ面上で $\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)$ が発散することになり異常である。この発散の原因は，1次元の場合には，(2.12)を導く数式操作が正しくないことによる。すなわち，温度 T の補正を正しく評価すれば，この発散が $\frac{1}{T}$ で評価されるものであることがわかる。従って，$T^2\times\frac{1}{T}=T$ となり，$\propto T$ の寄与を与える。具体的な計算のために次の分散関係を与えよう。

$$E_k=-t\cos k \quad (t>0) \tag{3.1}$$

(2.11)を出発点にとり，状態密度を $\rho_k(0)=\delta(\mu-E_k)$ とおく。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)&=-\frac{U^2}{2}(\pi T)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2}\frac{1}{2T\cosh^2\frac{x}{2T}}\sum_{k'q}\pi\delta(\mu-E_{k-q})\delta(x+\mu-E_{k'})\delta(x+\mu-E_{k'+q})\\
&=-\frac{U^2}{2}(\pi T)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2}\frac{1}{2T\cosh^2\frac{x}{2T}}\\
&\times\sum_{k'q}\sum_{ijl}\pi\frac{\delta(k^{(i)}(\mu)-k+q)\delta(k^{(j)}(x+\mu)-k')\delta(k^{(l)}(x+\mu)-k'-q)}{|t\sin(k-q)|\cdot|t\sin k'|\cdot|\sin(k'+q)|}\\
&=-\frac{U^2}{8}T^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{4T\cosh^2\frac{x}{2T}}\\
&\times\sum_{ijk}\pi\frac{\delta(k^{(i)}(\mu)-k+k^{(l)}(x+\mu)-k^{(j)}(x+\mu))}{|t^3\sin(k-k^{(l)}(x+\mu)+k^{(j)}(x+\mu))\sin k^{(j)}(x+\mu)\sin k^{(l)}(x+\mu)|}\\
&=-\frac{U^2}{8}T^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{4T\cosh^2\frac{x}{2T}}\sum_{(+-)}\left\{\frac{\delta(\pm k_F(\mu)-k)}{t^3|\sin k|(\sin k_F(x+\mu))^2}\right.\\
&\left.+\frac{\delta(\pm k_F(\mu)-k+2k_F(x+\mu))}{t^3|\sin(k-2k_F(x+\mu))|(\sin k_F(x+\mu))^2}+\frac{\delta(\pm k_F(\mu)-k-2k_F(x+\mu))}{t^3|\sin(k+2k_F(x+\mu))(\sin k_F(x+\mu))^2}\right\}
\end{aligned}\tag{3.2}$$

ここで $k^{(i)}(\mu)$，$k^{(j)}(x+\mu)$，$k^{(l)}(x+\mu)$ は $\mu=E_{k-q}$，$\mu=E_{k'}$，$x+\mu=E_{k'}$，$x+\mu=E_{k'+q}$ をそれぞれ，$k-q$，k'，$k'+q$ について解いたものであり，添字 i，j，l は，この解き方が一意的でないことをあらわす。$\sum_{(+-)}$ とは，複号のすべての組み合わせについて和をとることを意味する。$k_F(\mu)$，$k_F(x+\mu)$ は次式で与えられる。

$$k_F(\mu)=\left|\cos^{-1}\left(-\frac{\mu}{t}\right)\right|$$

$$k_F(x+\mu)=\left|\cos^{-1}\left(-\frac{x+\mu}{t}\right)\right| \tag{3.3}$$

(3.2)の第1項は $q=0$ に相当するので，これは無視する。第2項で $k_F(\mu)$ の符号が − の項をとり出してみる。k がフェルミ面上にある場合に，特に興味があるので，$k=k_F(\mu)$ とおくと，

$$-\frac{U^2}{8}T^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{4T\cosh^2\frac{x}{2T}}\frac{\delta(2k_F(x+\mu)-k_F(\mu)-k)}{t^3|\sin(k-2k_F(x+\mu))|(\sin k_F(x+\mu))^2}$$

$$=-\frac{U^2}{8}T^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{4T\cosh^2\frac{x}{2T}}\frac{\delta(-t\cos k_F(\mu)-x-\mu)}{t^3|(\sin k_F(\mu)-2k_F(x+\mu))|(\sin k_F(x+\mu))^2\times\frac{1}{\frac{t}{2}|\sin k_F(x+\mu)|}}$$

$$=-\frac{U^2}{8}T^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{4T\cosh^2\frac{x}{2T}}\frac{\delta(x)}{2t^2|\sin(k_F(\mu)-2k_F(x+\mu))||\sin k_F(x+\mu)|}$$

$$=-\frac{U^2}{8}T^2\frac{1}{4T}\cdot\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1}{(\sin k_F(\mu))^2}=-\frac{U^2}{64}T\frac{1}{t^2\sin^2 k_F} \tag{3.4}$$

他の項も同様にして $\propto T$ であることが示される。

b）運動量分布の不連続性

以上，見たように，1次元では，$\mathrm{Im}\Sigma\propto T$ である。$T=0$ での，フェルミ面付近での ε 依存性についても，線形であることが知られている。そこで $\mathrm{Im}\Sigma_k^R(\varepsilon)\propto|\varepsilon-\mu|$ である場合に，フェルミ面のとびが通常のフェルミ液体と比較して，どのように変更されるか見てみる。運動量分布は次式で与えられる。

$$n_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\mu}dx\left\{\frac{1}{x-E_k-\mathrm{Re}\Sigma_k(x)-i\mathrm{Im}\Sigma_k(x)}-c.\,c.\right\} \tag{3.5}$$

ここで $\mathrm{Im}\Sigma_k(\varepsilon)=C_k|\varepsilon-\mu|$，$a_k=\left[1-\frac{\partial\mathrm{Re}\Sigma}{\partial\omega}\Big|_{\omega=E_k}\right]^{-1}$ として，フェルミ面近傍での様子を見るために，η を微小量として，積分範囲が $\mu-\eta$ から μ までのところを取り出す。以下の議論はJ. M. Luttinger〔22〕による通常のフェルミ面の存在の証明を適用したものである。

$$n'_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-\eta}^{\mu}dx\left\{\frac{1}{a_k^{-1}(x-E_k)-iC_k|x-\mu|}-c.\,c.\right\} \tag{3.6}$$

$E_k=\mu-\Delta_k$ とおくと，$\Delta_k=\mp|\nabla_{k_0}E_{k_0}|\delta$ と書ける。k_0 はフェルミ面上にある。マイナスは k がフェルミ面の内側にある場合，プラスは k がフェルミ面の外側にある場合をあらわす。$y=\mu-x$ とおくと(3.6)は次のようになる。

$$n'_k=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\eta}dy\left\{\frac{1}{a_k^{-1}(\Delta_k-y)-iC_k|y|}-c.\,c.\right\} \tag{3.7}$$

$t=|\Delta_k|/y$ とおくと

$$n_k'=\frac{1}{\pi}\int_{|\Delta k|/\eta}^{\infty}dt\frac{C_k t}{(a_k^{-1})^2t^2(t\mp 1)^2+C_k^2t^2}=\frac{1}{\pi}\int_{|\Delta k|/\eta}^{\infty}dt\frac{C_k}{(a_k^{-1})^2t(t\mp 1)^2+C_k^2 t} \tag{3.8}$$

フェルミ面に近づくにつれて，$\delta\to 0$，$|\Delta_k|\to 0$ となり積分範囲は $0\sim\infty$ となる。

(3.8)は，$t\sim 0$ で対数発散をしている。従ってフェルミ面で n_k が発散している。これは明らかに非物理的な結果である。これは，1次元では，階段関数的な n_k のフェルミ面でのとびの存在を仮定して計算することが誤まりであることを示唆する。1次元では g-ology の研究が示すように，フェルミ面での n_k の不連続は存在せず，べきで減衰していくものであると考えられている。最近の Ogata-Shiba〔8〕による厳密解の研究や，Sorella et al.〔9〕による有限サイズスケーリングの研究もこの結果を支持している。(また，Solyom〔7〕も参照)

(3.8)の対数発散は，a_k^{-1} が有限であることを仮定して得られるものである。実際には $\mathrm{Im}\Sigma_k^R(\varepsilon)\propto|\varepsilon-\mu|$ は a_k^{-1} が発散するという結果を導く。従って，n'_k はフェルミ面上で発散するのではなく，むしろ0へと近づく。以下，a_k^{-1} について，評価してみる。Kramers-Kronig の関係を使って，自己エネルギーの実数部と虚数部を関係づける。$\mathrm{Im}\Sigma_k(\varepsilon)$ の ε 依存性について，$\varepsilon\sim 0$ の近傍だけではなく，全体の情報が必要であるが，$\frac{\partial\mathrm{Re}\Sigma}{\partial\varepsilon}$ の特異性は $\varepsilon\sim 0$ の寄与から得られる。

$$\mathrm{Re}\Sigma_k^R(\varepsilon)\sim\mathrm{P}\int_{-c}^{c}\frac{\mathrm{Im}\Sigma_k^R(\varepsilon')}{\varepsilon'-\varepsilon}d\varepsilon' \qquad (\varepsilon>0\text{ として})$$

$$=\left[\int_{-c}^{0}\frac{-C_k\varepsilon'}{\varepsilon'-\varepsilon}d\varepsilon'+\int_0^{\varepsilon-\sigma}\frac{C_k\varepsilon'}{\varepsilon'-\varepsilon}d\varepsilon'+\int_{\varepsilon+\sigma}^{c}\frac{C_k\varepsilon'}{\varepsilon'-\varepsilon}d\varepsilon'\right]$$

$$=-2\varepsilon C_k\ln|\varepsilon|+2\varepsilon C_k\ln|c^2-\varepsilon^2| \tag{3.9}$$

これを ε で微分して

$$\frac{\partial\mathrm{Re}\Sigma_k^R(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=-2C_k\ln|\varepsilon|-2C_k+2C_k\ln|c^2-\varepsilon^2|-\frac{4\varepsilon^2C_k}{(c^2-\varepsilon^2)} \tag{3.10}$$

これは $\varepsilon\to 0$ で対数発散を示す。すなわちフェルミ面上で $a_{k_F}=0$ であり，フェルミオンで記述される準粒子は存在しない。

以上の異常な結果は，一次元におけるフェルミ面の特殊な形状によるものである。すなわち，Fig3.1 に示すように，y 方向の dispersion が存在せず，角方向の積分の自由度が存在しないことによる。最近，$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)\propto T$ の起源を，フェルミ面のパーフェクト・ネスティングによるものとする論文がいくつかでている（Hellmann〔17〕，Virosztek and Ruvalds〔18〕)。しかし，正確には，パーフェクト・ネスティングではなく，ある方向に，

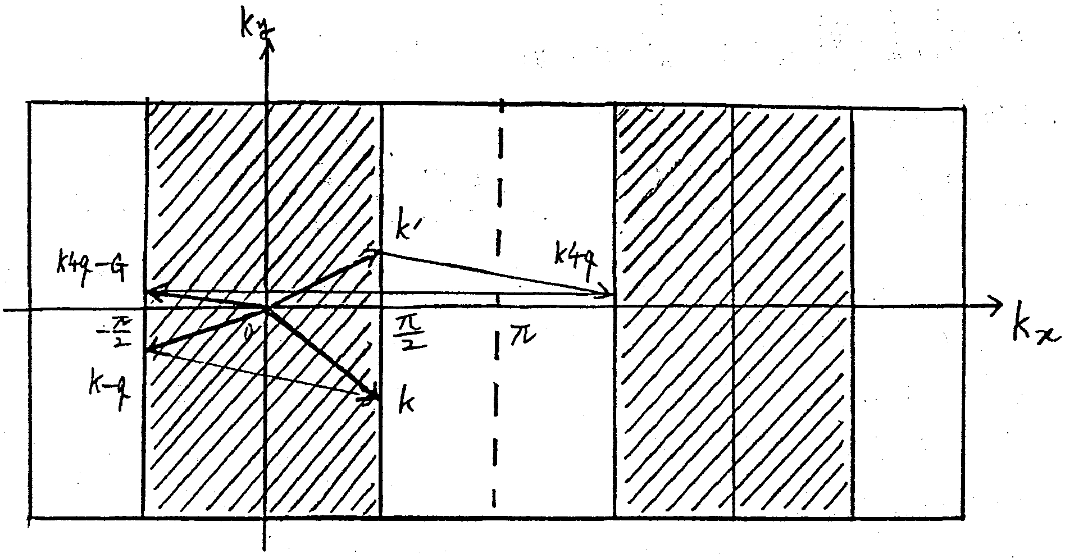

Fig 3.1　1次元ハバード・モデルの half-filled におけるフェルミ面。

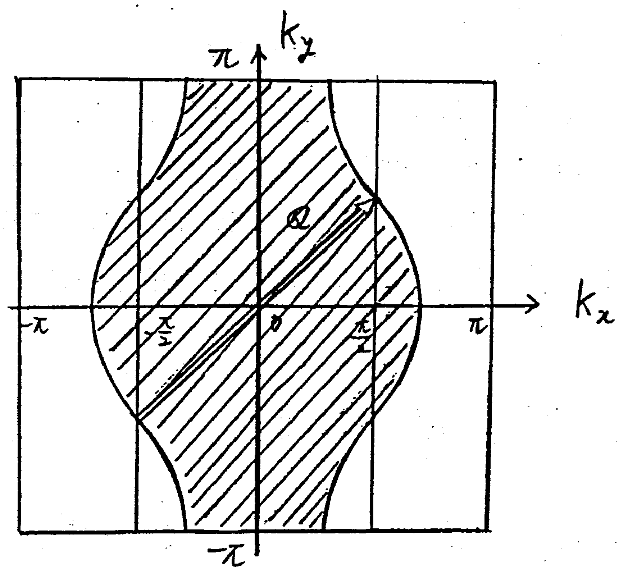

Fig 3.2　$\boldsymbol{Q}=(\pi,\pi)$ の perfect nesting vector をもった擬1次元ハバード・モデルのフェルミ面。

dispersin 在しないことが本質的である。従ってパーフェクト・ネスティングがあっても，フェルミ面上に，平担な部分が存在しなければ，上述の議論は適用できない。実際，擬1次元系にしばしば見られるような $\boldsymbol{Q}=(\pi, \pi)$ の nesting vector を持った dispersion では，フェルミ面は perfect nesting しているが，平担ではない（Fig 3.2)。この場合，ImΣ の T^2 項の係数は対数発散を与え，§5以下の2次元の場合と同様の温度依存性を与えると考えられる。

§4．1次元系の電気抵抗

前節で見たように，1次元の場合には，準粒子の寿命は T または ε に比例し，このことは，$T=0$ で $a_{k=k_F}=0$ を導く。従って current $\boldsymbol{J}_k$ は $T\to 0$ で 0 であり，絶縁体になる。しかし，有限温度では，(3.8)や(3.10)の対数発散は，温度 T でカット・オフされるであろう。ゆえに，a_k は，有限温度で，$k=k_F$ において，$\log T$ の温度依存性を有することになるが，有限の値で残ることになる〔18〕。このようにして，1次元系は有限温度において，0でない，準粒子のスペクトルを持ち，それは低温では $a_{k_F}\ll 1$ で，incoherent であると思われるが，それの電気伝導を考えることはできる。その場合の電気抵抗をフェルミ液体論の formulation に従って，計算してみる。

この場合，$a_{k=k_F}$ が温度依存性を有し，しかも充分低温では $a_k\ll 1$ であると考えられるので，その効果は無視できないように思える。しかし，電気伝導率の表式には，a_k は，あらわには含まれない。(2.33)によれば，$J_{k\mu}$ にかかっている a_k は分母の a_k と cancel する。$\Phi_{k\nu}$ は積分方程式(2.31)の解として与えられる。(2.31)には，$\Delta_0(k,k';k'+q,k-q)$ の中の $\rho_k(0)=a_k\delta(\mu-E_k{}^*)$ と $\boldsymbol{J}_k$ に a_k が含まれるが，$\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}$ についての和を実行すれば，$\rho_k(0)$ のデルタ関数の中の $E_k{}^*=a_k(E_k+\Sigma_k)$ に含まれる a_k がデルタ関数の外に出て，$\rho_k(0)$ にかかっている a_k を cancel するので，$\boldsymbol{J}_k$ にかかっている a_k のみが残る。故に Φ_k には a_k が1つかかっている。(2.33)において $\boldsymbol{k}$ についての和を実行すると，同様に，$E_k{}^*$ にかかっている a_k が外に出て，$a_k{}^{-1}$ が全体にかかるので，Φ_k にかかっている a_k を cancel する。従って conductivity の表式には a_k はあらわには含まれていないので，繰り込み因子 a_k の効果は，無視して考えることができる。

準粒子のスペクトルが，通常のフェルミ液体論と異なって，incoherent なものであるならば，フェルミ液体論にもとづく，電気伝導率の表式を，そのまま適用することには，疑問が残る。(3.10)に従えば $\varepsilon\sim T$ では，$\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\varepsilon}$ は $\sim\log\dfrac{c}{\varepsilon}$ ではなく，$\sim\log\dfrac{c}{T}$ に取って代わられるであろう。c は，$\mathrm{Im}\Sigma\propto|\varepsilon|$ とすることが許されるような ε の範囲である。これは，$\varepsilon\lesssim c\ll E_F$（フェルミ・エネルギー）を満足する大きさである。$T\sim c$ であるならば，$\log\dfrac{c}{T}$ の寄与は，ほとんど効かず，$a_k\sim 1$ となる。運動量分布関数(3.8)は $a_k{}^{-1}$ が有限ならば，$T=0$ で対数発散を示すことを見たが，有限温度では，このような singularity はなくなる。(3.5)で $\mathrm{Im}\Sigma$ を $\varepsilon>T$ について $=C_k|\varepsilon|$, $\varepsilon\lesssim T$ について $=C_kT$ とすれば，(3.8)の積分を実行してあらわれる対数部分は $\sim\ln\dfrac{\eta}{T}$ となる。これは $T\sim\eta$ であるならば，寄与は小さく，n_k に singular な振舞いは存在しなくなる。有限温度では，フェルミ分布関数はフェルミ面のところで，温度によってぼかされて，鋭いとびは消失するから，1次元系に固有の運動量分布のとびの消失と区別がつかなくなるであろう。従って，$T\sim c$，$T\sim\eta$ では，1次元系をフェルミ液体として扱うことができると思われる。$c,\eta\ll E_F$ である

から $T \sim c \sim \eta \ll E_F$ を満たすフェルミ液体論が成立する温度領域が存在する。従って，ここでの議論は全て，このような温度領域で適用されるものとする。

さて，電子-電子散乱による電気抵抗について考える。当然，運動量の散逸は，Umklapp process によって起こされる。以下の計算では，Umklapp process のみをとり入れるものとする。

1次元の場合，自己エネルギーの虚数部が(3.4)で与えられることに対応して，$\vec{\Phi}$ を決定する方程式(2.31)は次のようになる。

$$0=J_k+\frac{U^2}{16}\pi^2 T\frac{\delta_{kk_F}}{t^2\sin^2 k_F}[\Phi_{-k_F}+\Phi_{-k_F}-\Phi_{k_F}-\Phi_{k_F}] \tag{4.1}$$

$$+\frac{U^2}{16}\pi^2 T\frac{\delta_{k-k_F}}{t^2\sin^2 k_F}[\Phi_{k_F}+\Phi_{k_F}-\Phi_{-k_F}-\Phi_{-k_F}] \tag{4.2}$$

1次元系では k は k_F もしくは $-k_F$ のみとり得る(Fig 3.1)。$\Phi_{-k}=-\Phi_k$ であることから，Normal process が(4.1)のかっこの中の式を0にすることはすぐにわかる。

$$\Phi_{-k_F}+\Phi_{k_F}-\Phi_{k_F}-\Phi_{-k_F}=0 \tag{4.3}$$

(4.2)により，Φ_{k_F} は次のように求められる。

$$\Phi_{kF}=\frac{4t^2\sin^2 k_F}{\pi^2 U^2 T}J_{k_F} \tag{4.4}$$

また，current J_{k_F} は次式で与えられる。

$$J_{k_F}=\frac{\partial E}{\partial k}\bigg|_{k=k_F}=t\sin k_F \tag{4.5}$$

ただし，相互作用によるくり込みは無視した。これは既に述べたように $T \sim c$ では正当化される。

Fig3.1で示されるような Umklapp process は half-filled でのみ可能であるので，$k_F=\frac{\pi}{2}$ とすると，電気伝導率は，(2.33)により，次式で与えられる。

$$\sigma_{\mu\nu}(0)=\frac{8e^2t^3}{\pi^2 U^2 T} \tag{4.6}$$

従って，1次元系では電子-電子散乱による電気抵抗は，T に比例し，しかも half-filled でのみ起こる。温度 T によるフェルミ面のボケを考慮して，half-filled から，はずれた場合の Umklapp process を可能にしたとしても，half-filled からずれるに従い，指数関数的に，抵抗の係数は小さくなる。half-filled からのフェルミ・エネルギーのずれを ΔE とすれば $1/\cosh^2\frac{\Delta E}{2T}$ の因子が係数にかかることになる。

1次元において実際に T に比例した，電子-電子散乱による抵抗は観測されるであろう

か。準1次元系の有機電気伝導体について，電気抵抗の温度依存性が測定されている。その中でHMTSF-TCNQは，14kbarの圧力下で，2K$<T<$30Kの温度領域において，電気抵抗$\rho=a+bT$であることが知られている〔23〕。この温度領域ではphononの散乱によってTに比例する抵抗が得られるとは考え難い。電子-電子散乱によるものであるならば，half-filledでなければならない。Kaveh〔24〕によれば，$2k_F$の周期をもったCDWによるsuperlatticeへの運動量のtransferによって，Umklapp processが可能である。Jérome et al〔23〕によれば，Tに比例する抵抗のオーダーは$\sim 1\mu\Omega$の程度である。HMTSF-TCNQについてのパラメーターt, Vのデータはないが，TTF-TCNQにおける値を借りると，$t\sim$0.1eV，$4t/U\sim 1$であり，HMTSF-TCNQでは，Uは小さい〔23〕ことを考慮すると，(4.6)より，抵抗の大きさは1〜10$\mu\Omega$の程度となり，オーダーとしては悪くないと思われる。

§5．2次元系の自己エネルギーの虚数部の異常

ここでは，Free dispersionにおいて，自己エネルギーの虚数部のT^2項の係数が発散していることを示そう。dispersionを次式で定める

$$E_k=k^2_x+k^2_y=k^2 \tag{5.1}$$

自己エネルギーの虚数部のT^2項の係数は，(2.12)に従って，

$$\sum_{k',k''}\rho_{k'}(0)\,\rho_{k''}(0)\,\rho_{k-k''+k'}(0)$$
$$=\sum_{k'k''}\delta(\mu-E_{k'})\delta(\mu-E_{k''})\delta(\mu-E_{k-k''+k'})$$
$$=\int\frac{k'dk'k''dk''d\theta'd\theta''}{(2\pi)^2}\delta(\mu-k'^2)(\delta(\mu-k''^2)\delta(\mu-(k_x-k_x''+k_x')^2-(k_y-k_y''+k_y')^2)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\theta' d\theta''\,\delta(\mu-\mu(\cos\theta-\cos\theta''+\cos\theta')^2-\mu(\sin\theta-\sin\theta''+\sin\theta')^2)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\delta(2\mu(\cos(\theta-\theta'')-\cos(\theta-\theta')+\cos(\theta-\theta'')-1))d\theta'd\theta'' \tag{5.2}$$

ただし$\boldsymbol{k}=(k\cos\theta,\ k\sin\theta)$, $\boldsymbol{k}'=(k'\cos\theta',\ k'\sin\theta')$, $\boldsymbol{k}''=(k''\cos\theta'', k''\sin\theta'')$である。デルタ関数の中の式が0になる$\theta'$etcの条件は，簡単に書き下せて，次のようになる。

1) $\theta''=\theta'$　　2) $\theta''=\theta$　　3) $\theta'=\theta\pm\pi$

1), 2), 3) の内のいずれかが，満たされていればよい。すると，(5.1) は次のようになる。

$$(5.1)=\frac{1}{(2\pi)^2 16\mu}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta'd\theta''\frac{\delta(\theta''-\theta')+\delta(\theta''-\theta)}{\left|\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}-\theta''\right)\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|}$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^2 8\mu}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta'd\theta'\frac{\delta(\theta'-\theta-\pi)+\delta(\theta'-\theta+\pi)}{|\sin(\theta'-\theta)-\sin(\theta'-\theta'')|}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2 2\mu}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta'\frac{1}{|\sin(\theta-\theta')|}=\frac{1}{(2\pi)^2\mu}\log\left|\frac{\infty}{0}\right|\rightarrow+\infty \tag{5.3}$$

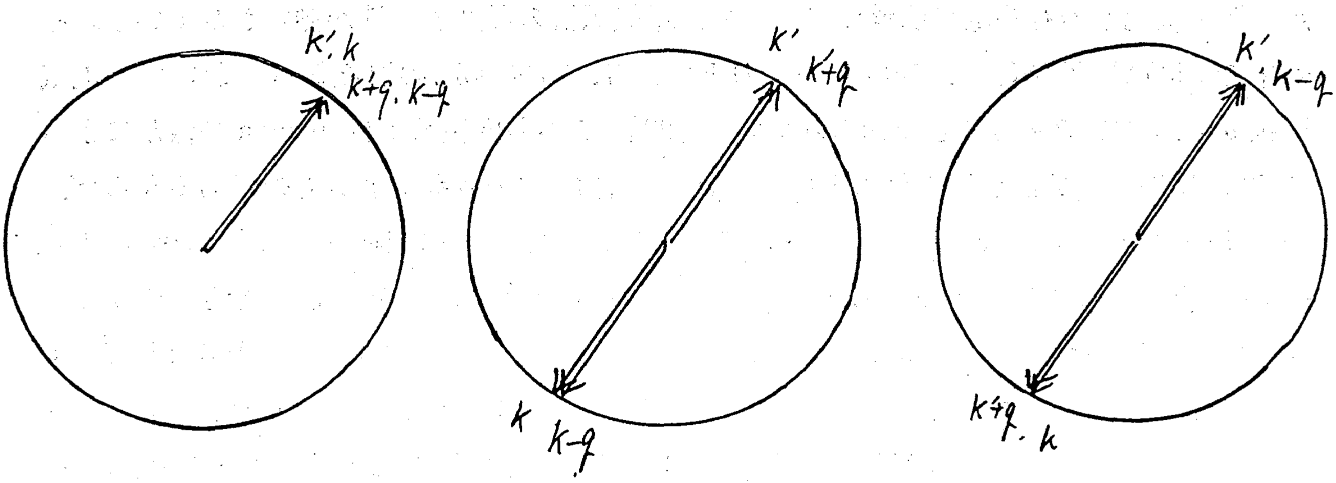

Fig 5(a)~(c)　2次元系において，ImΣ に異常な寄与をする散乱過程。

この発散は，1）$\theta'=\theta''=\theta$，2）$\theta'=\theta\pm\pi$，$\theta''=\theta'$，3）$\theta''=\theta$，$\theta'=\theta\pm\pi$，の点の寄与によるものであり，これらは，Fig5，(a)~(c)の散乱過程に対応している。勿論(5.1)の Free dispersion には，フェルミ・エネルギー μ を，フェルミ面がブリルアン・ゾーンの境界と交わることのない程度の大きさに定めておけば，van Hove Singularity の寄与はない。しかも，上の議論は μ には無関係である。Fig5(a)~(b)が示すように，これらの $\boldsymbol{q}\to 0$ での散乱過程は，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}'$ がフェルミ面に沿って，無限小の散乱を受けることに対応している。フェルミ面に沿っては，エネルギーの変化が0であるから，状態密度 $\dfrac{dk}{dE}$ は，ここで，非常に大きくなる。この状態密度の増大が，$\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}'$ のそれぞれについてあり，その積が，2次元では，(5.3)のような対数発散を招いていると考えられる。Fig5(c)の散乱過程についても，同様の解釈が成り立つのではないかと考えられる。これまで，電子のスピンについては，全く考慮していないので，仮にスピンレス・フェルミオンのようなものを carrier として考えれば，Fig5(b)の散乱過程と Fig5(c)の散乱過程は区別することができない。このため transter される運動量が $q=2k_F$ であるような Fig5(c)の散乱過程においても，Fig5(b)であらわされる散乱過程と同じ，状態密度の増大があると考えてよいのではないかと思われる。これまでの議論が電子のスピンに全く irrelevant なものなので，このように考えることが許される。ここでは Free dispersion を仮定したが，この結果は，dispersion の形によらない。Appendix で，一般の dispersion において，自己エネルギーの虚数部の主要項を $\propto T^2$ と仮定すると，その係数は必らず，対数発散していることを示す。

§6．2次元系のImΣの T,ε 依存性

前節で見たように，2次元フェルミ粒子系では，準粒子のダンピング，ImΣの温度依存性は通常のフェルミ液体における T^2 に比例したものとは，異なってくる。ここでは，ImΣの T 依存性，及び，$T=0$ での ε 依存性について論じる。dispersionは簡単のため，Free dispersionとするが，結果は恐らくdispersionの形には依存しないであろう。まずはじめに $T\neq 0$ の場合について扱う。自己エネルギーの虚数部の表式(2.9)の，$\mathrm{Im}G_{k'}^{R}(\varepsilon)$ を $\delta(\varepsilon+\mu-E_{k'})$ におきかえて，

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)=-U^2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon'}{2\pi}\left[\mathrm{cth}\frac{\varepsilon'}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon'}{2T}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\left[\mathrm{th}\frac{x}{2T}-\mathrm{th}\frac{x-\varepsilon'}{2T}\right]$$
$$\times\sum_{k',q}\delta(x+\mu-E_{k'})\,\delta(x-\varepsilon'+\mu-E_{k'+q})\delta(\varepsilon'+\mu-E_{k-q}) \qquad (6.1)$$

ここで，dispersionは $E_k=k^2$ とする。$\boldsymbol{k}'$，$\boldsymbol{q}$ についての和は積分におきかえて，次のように実行される。$k=k_F=\sqrt{\mu}$ とおいて，

$$\sum_{k'q}\delta(x+\mu-E_{k'})\,\delta\,(x-\varepsilon'+\mu-E_{k'+q})\,\delta\,(\varepsilon'+\mu-E_{k-q})$$
$$=\sum_{k'q}\delta(x+\mu-k'^2)\delta(x-\varepsilon'+\mu-k'^2-2kq\cos\theta'-q^2)\,\delta\,(\varepsilon'+2kq\cos\theta-q^2)$$
$$=\int\frac{qdqd\theta'd\theta}{(2\pi)^4}\delta(-\varepsilon'-2\sqrt{x+\mu}\,q\cos\theta'-q^2)\delta(\varepsilon'+2kq\cos\theta-q^2)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{qdq}{\sqrt{4(x+\mu)q^2-(\varepsilon'+q^2)^2}\sqrt{4k^2_Fq^2-(\varepsilon'-q^2)^2}}$$
$$=\frac{1}{2(2\pi)^4}\int\frac{dt}{\sqrt{(t^2-(4(x+\mu)-2\varepsilon')t+\varepsilon'^2)(t^2-(4\mu+2\varepsilon')t+\varepsilon'^2)}} \qquad (6.2)$$

ただし，ここで θ，θ' はそれぞれ，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{q}$，及び，$\boldsymbol{k}'$ と $\boldsymbol{q}$ のなす角である。$|\boldsymbol{k}'|=k'$ $|\boldsymbol{q}|=q$ $|\boldsymbol{k}|=k$ である。4行目から5行目へ移るときに，$t=q^2$ とした。q についての積分は第1ブリルアン・ゾーンの中で行われるが，3行目の式のデルタ関数が0にならないための条件が，積分範囲を制限する。この条件は次のように与えられる。

$$\sqrt{x+\mu}-\sqrt{x+\mu-\varepsilon'}\leq q\leq\sqrt{x+\mu}+\sqrt{x+\mu-\varepsilon'}$$
$$(6.3)$$
$$-k_F+\sqrt{k_F^2+\varepsilon'}\quad\leq q\leq k_F+\sqrt{k_F^2+\varepsilon'}$$

あるいは，

$$2(x+\mu)-\varepsilon'-2\sqrt{(x+\mu)^2-\varepsilon'(x+\mu)}\leq t\leq 2(x+\mu)-\varepsilon'+2\sqrt{(x+\mu)^2-\varepsilon'(x+\mu)}$$
$$(6.4)$$
$$2k_F^2+\varepsilon'-2k_F\sqrt{k_F^2+\varepsilon'}\quad\leq t\leq\quad 2k_F^2+\varepsilon'+2k_F\sqrt{2k_F^2+\varepsilon'}$$

この2つの不等式は，同時に満たされねばならない。また，(6.4)の t の範囲の上限と下

限は，それぞれ，(6.2)の被積分関数の分母の２次式の解になっていることがすぐに確められる。

(6.4)の不等式は，ε',x の大小によって，どちらか１つを採用すれば，十分である。$x\leq\varepsilon'$ の場合には上の不等式，$x>\varepsilon'$ の場合には，下の不等式によって積分範囲が与えられる。従って，(6.2)の積分は，完全楕円積分に他ならない。第１種の完全楕円積分を用いて次のようにあらわすことができる。

$$(6.2)=\frac{1}{2(2\pi)^4}\frac{1}{2\mu}F\left(\frac{\pi}{2},\ \sqrt{1-\frac{\varepsilon'^2(x-\varepsilon')^2}{16\mu^4}}\right) \tag{6.5}$$

ただし，x,ε' は μ にくらべて小さいとして主要項をとった。公式

$$F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)\sim\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-k^2}\quad(k\to1-0) \tag{6.6}$$

を使うと(6.5)は次のように書きかえられる。

$$(6.2)=\frac{1}{4(2\pi)^4}\frac{1}{\mu}\log\frac{4\mu^2}{\varepsilon'(x-\varepsilon')} \tag{6.7}$$

これを，(6.1)に代入して，ε'，x を $y=\dfrac{\varepsilon'}{2T}$，$z=\dfrac{x}{2T}$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Sigma^R{}_k(0)=&-\frac{U^2\pi T^2}{(2\pi)^6}\int dy\left[\mathrm{cth}\,y-\mathrm{th}\,y\right]\int dz\left[\mathrm{th}\,z-\mathrm{th}(z-y)\right]\frac{1}{\mu}\ln\frac{\mu^2}{y(z-y)}\\&-\frac{U^2}{(2\pi)^5}\int_{-\infty}^{\infty}dy[\mathrm{cth}\,y-\mathrm{th}\,y]\int dz\left[\mathrm{th}\,z-\mathrm{th}(z-y)\right]\frac{T^2}{\mu}\ln\frac{\mu}{T}\\=&-\frac{U^2\pi T^2}{(2\pi)^6}\int dy\int dz[\mathrm{cth}\,y-\mathrm{th}\,y][\mathrm{th}\,z-\mathrm{th}(z-y)]\frac{1}{\mu}\ln\frac{\mu^2}{y(z-y)}-\frac{U^2}{2^7\pi^3}\frac{T^2}{\mu}\ln\frac{\mu}{T}\end{aligned} \tag{6.8}$$

これの第１項は T^2，第２項は $T^2\ln\dfrac{\mu}{T}$ に比例する。従って，２次元系では自己エネルギーの虚数部の主要項は，通常のフェルミ液体とは異なり，$T^2\ln\dfrac{\mu}{T}$ に比例する。

$T=0$ の場合についても全く同じ様にして，ε 依存性が $\varepsilon^2\ln\dfrac{\mu}{\varepsilon}$ で与えられることがわかる。(2.9) において $T\to0$ とすれば，$\left[\mathrm{cth}\dfrac{\varepsilon'-\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\dfrac{\varepsilon'}{2T}\right]\to\left[\theta(\varepsilon'-\varepsilon)-\theta(\varepsilon')\right]$，$\left[\mathrm{th}\dfrac{x}{2T}-\mathrm{th}\dfrac{x+\varepsilon-\varepsilon'}{2T}\right]\to[\theta(x)-\theta(x+\varepsilon-\varepsilon')]$ となるので，上と同様にして，k',q についての積分を実行すると，主要項として次式が得られる。

$$\mathrm{Im}\Sigma_k{}^R(\varepsilon)\sim-\frac{U^2\pi}{(2\pi)^6}\frac{\varepsilon^2}{2\mu}\ln\frac{\mu}{\varepsilon} \tag{6.9}$$

従って，２次元系における自己エネルギーの虚数部の T，ε 依存性は，$\propto T^2$，ε^2 ではなく，$\propto T^2\ln\dfrac{\mu}{T}$，$\varepsilon^2\ln\dfrac{\mu}{\varepsilon}$ である。ここでは，Free dispersion を仮定して計算したが，この結

果は，恐らく，dispersion の形にはよらず，2次元系においては必らず，このような T, ε 依存性をもつと考えるのが妥当であろう。

§7．2次元系におけるフェルミ面

1次元の場合，自己エネルギーの虚数部の ω-linear 項から，温度 $T=0$ において $a_{k=k_F}=0$ であり，フェルミ面の喪失が従うことを見たが，ここでは2次元系における自己エネルギーの異常な ω-依存性が，どのような結論を導くか見ていく。自己エネルギーの虚数部の温度依存性は，$T^2\ln T$ で与えられることから，$T=0$ においては，$\propto -\omega^2\ln\omega$ であるとして，1次元の場合と同様の計算を行なう。(3.6)の分母の虚数部を $-C_k(x-\mu)^2\ln|x-\mu|$ におきかえる。

$$n_k'=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-\eta}^{\mu}dx\left\{\frac{1}{a_k^{-1}(x-E_k)+iC_k(x-\mu)^2\ln|x-\mu|}-c.c.\right\} \tag{7.1}$$

$$=\int_{|\Delta_k|/\eta}^{\infty}dt\frac{-2C_k|\Delta_k|\ln|\frac{\Delta_k}{t}|}{a_k^{-2}t^2(t\mp 1)^2+C_k^2|\Delta_k|^2\left(\ln|\frac{\Delta_k}{t}|\right)^2} \tag{7.2}$$

ただし，2行目に移行するときに，$t=|\Delta_k|/\mu-x$ として変数変換した。k をフェルミ面へ近づけるに従い，$\Delta_k=\mp|\nabla_{k_0}E_{k_0}|\delta\to 0$ となるが，このとき $C_k|\Delta_k|\ln|\Delta_k/t|\to 0$ となるので(7.2)の被積分関数は，デルタ関数におきかえられ，次式が従う。

$$n_k'=\int_0^{\infty}dt\delta(|a_k|^{-1}(t\mp 1))=|a_k|\int_0^{\infty}dt\delta(t\mp 1) \tag{7.3}$$

デルタ関数の中の複号がそれぞれ k がフェルミ面の内側，外側であることを思い起こせば，$|a_k|\neq 0$ である限り，(7.3)はフェルミ面に有限のとびが，存在することを意味する。1次元の場合では $a_{k_F}=0$，すなわち $\left.\frac{\partial \mathrm{Re}\Sigma_k(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ の発散を導くとき，$\mathrm{Im}\Sigma(\varepsilon)$ の ε についての積分のうち，$\varepsilon=0$ の点が singular な寄与を与えていた。そこで，ここでも，Kramers-Kronig の関係によって，$\mathrm{Im}\Sigma$ の $\varepsilon=0$ 付近での寄与が，$\mathrm{Re}\Sigma$ にどういう影響を与えるか，見てみよう。勿論，この議論は，$\mathrm{Im}\Sigma_k(\varepsilon)$ の ε についての全領域での依存性を考慮しないという点において正当化されないものであるが，この点を考慮するには，バンドの形を具体的に決めなければならない。

Kramers-Kronig の関係によって，$\Sigma_k^R(\varepsilon)$ は次のように与えられる。

$$\Sigma_k^R(\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\mathrm{Im}\Sigma_k^R(\varepsilon')}{\varepsilon'-\varepsilon+i\delta}d\varepsilon'+\text{〔第1項以外の積分領域の寄与〕} \tag{7.4}$$

この式の第1項のみ考える。ε で微分して，実数部をとると，

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\Sigma_k{}^R(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \sim \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\{(\varepsilon'-\varepsilon)^2-\delta^2\}\mathrm{Im}\Sigma_k{}^R(\varepsilon')}{((\varepsilon'-\varepsilon)^2-\delta^2)^2}d\varepsilon' \sim \frac{C_k}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{-\{(\varepsilon'-\varepsilon)^2-\delta^2\}\varepsilon'^2\ln|\varepsilon'|}{((\varepsilon'-\varepsilon)^2+\delta^2)^2}d\varepsilon'$$

$$\xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{C_k}{\pi}\Big\{2c(1-\log|c|)+\varepsilon(1+2\ln|c|)\ln\left|\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\right|+\frac{2c\varepsilon^2}{c^2-\varepsilon^2}\ln|c|$$

$$+2\varepsilon[(\log|c-\varepsilon|)^2-(\log|c+\varepsilon|)^2]\Big\} < +\infty \quad (-c<\varepsilon<c) \qquad (7.5)$$

従って，$\varepsilon=0$ の付近の寄与によって，$\dfrac{\partial \mathrm{Re}\Sigma}{\partial\varepsilon}$ が発散することはなく，$a_k=0$ とはならない。

以上の議論は，$|\varepsilon|$ の大きいところでの寄与を考慮していない点で不正確あるが，$\mathrm{Im}\Sigma$ の ε の小さいところでの ε-依存性は，フェルミ面近くの電子の散乱に排他原理の影響が強く効くことによって決定されるものであり，2次元の場合の，$\propto T^2\ln T$ なる異常な温度依存性も，フェルミ面近傍での排他原理の効果が本質的に重要である。このことを考えれば $|\varepsilon|$ の大きいところ，すなわち，フェルミ面から離れて，排他原理による位相空間の制約を受けないような散乱過程の寄与が，2次元と3次元とで drastic な質的変化を与えるとは考え難い。故に，2次元系に固有の効果を調べるには，$\varepsilon\sim 0$ の付近の寄与が最も重要と思われる。

従って2次元においては，準粒子のダンピングは異常であるが，運動量分布の E_F におけるとび，すなわち，フェルミ面は存在する。$\mathrm{Im}\Sigma(\omega)\propto-\omega^2\ln|\omega|$ の導出において，フェルミ面の存在の仮定から出発したことが重要であったので，本節における結果は consistent なものであることを意味している。

§8. 2次元系の電気抵抗の温度依存性

準粒子の減衰の温度依存性は，電子-電子散乱による抵抗の温度依存性として観測することができる。これまで見てきた2次元系に固有の準粒子の減衰の異常な温度依存性が電気抵抗の温度依存性としてあらわれるかどうかを検討する。当然，電子-電子散乱による電気抵抗は，Umklapp process によってのみ発生する。Umklapp process は，フェルミ面の形状，フェルミ・エネルギーに大きく依存する。既に見たように，2次元系に固有な，singular な寄与は，特定の散乱過程の寄与によるものであった。Fig5.(a)〜(c)に示されるように，散乱される準粒子の運動量 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ と散乱後の運動量 $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}$ が平行，もしくは，反平行の場合であり，準粒子の状態密度の増大が期待されるような散乱過程である。Umklapp process の場合には，Fig8.1に示すような散乱過程が，これと同じ，singular な寄与をする。これは，特定の filling に対して，特定の運動量 $\boldsymbol{k}$ をもった準粒子にのみ可能な散乱過程である。全ての準粒子の中で圧倒的に dominant な，その他の運動量をもったものは，singular な寄与をする Umklapp process は許されず，Umklapp process を通じ

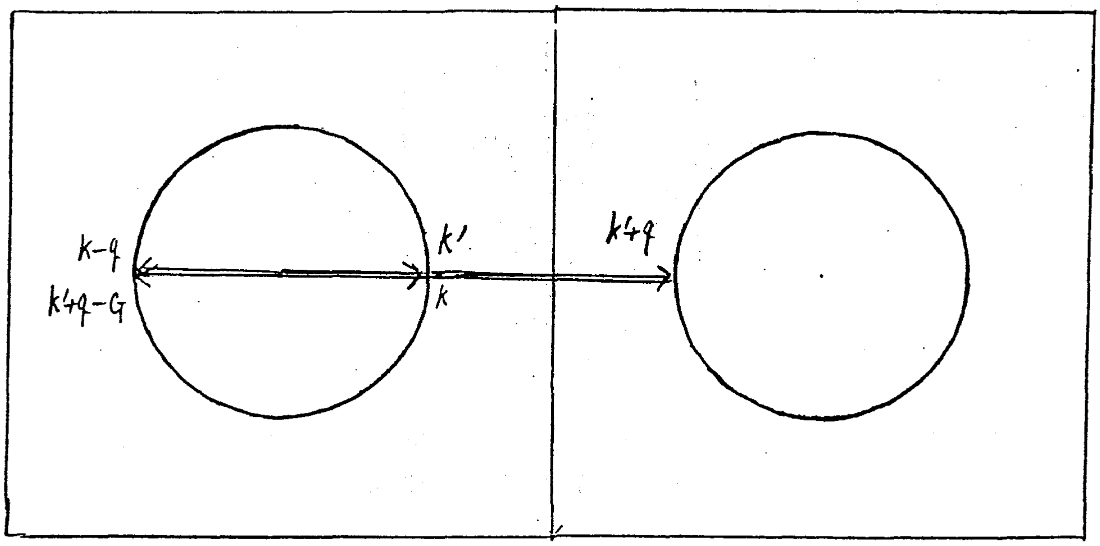

Fig 8.1　2次元系で，$\mathrm{Im}\Sigma$ に異常な寄与をする Umklapp process。

ては，通常の $1/T^2$ に比例する減衰をもつことになる。電気伝導には当然，寿命の長い準粒子が主として寄与するのであるから，Fig8.1に示されるような散乱をする準粒子は，それ以外の準粒子に比べて，伝導への寄与は小さい。従って電気伝導率，すなわち，その逆数の電気抵抗は $1/T^2$ に比例する寿命をもった準粒子によって決められるので，電気抵抗の温度依存性は，通常の T^2 に比例するものが得られることになる。つまり，2次元系においては，準粒子のダンピングは通常のフェルミ液体と較べて，少し異常であるが，電子-電子散乱による電気抵抗の温度依存性としては，通常のフェルミ液体的な T^2 に比例するものがあらわれることになる。

§9．2次元正方格子の抵抗の温度依存性 —酸化物高温超伝導との関係—

2次元正方格子のハバード・モデルは．P. W. Anderson が酸化物高温超伝導との関連を指摘して以来，盛んに研究がなされた。

その中で，Normal state の輸送係数の異常を，このモデルによって説明しようとする試みがいくつかある。酸化物高温超伝導の Normal state における異常の一つの顕著な例は室温から T_c 近くに到るまでの広い範囲にわたっての抵抗の T に比例した振舞である〔25〕。これを2次元正方格子の half-filled における特異性から説明しようと試みた論文がある〔18〕〔19〕。これらはいずれも half-filled 及び，その近くでのフェルミ面の nesting の効果を利用したものである。2次元正方格子は，half-filled において perfect nesting をしている（Fig9.1)。2対の向かい合う平行なフェルミ面（線）は，1次元系におけるフェルミ面と同じ効果を与える。ただし，2次元系には，1次元系にはない固有の性質があり，その1つは，状態密度における van Hove singularity の存在である。2次元正方格子の場

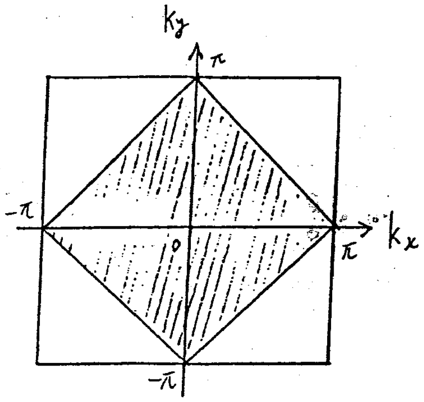

Fig 9.1　2次元正方格子のハバード・モデルの half-filled におけるフェルミ面。$(\pm\pi, 0), (0, \pm\pi)$ に van Hove singularity がある。

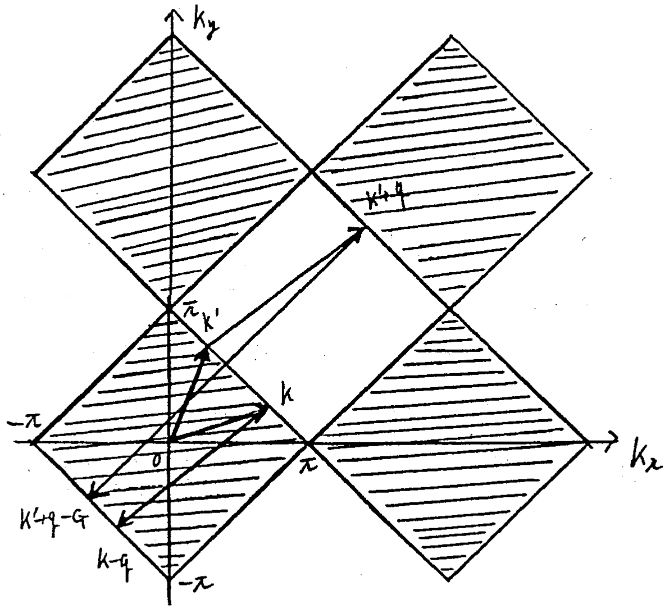

Fig 9.2　2次元正方格子のハバード・モデルで，half-filled において，$\mathrm{Im}\Sigma \propto T$ を与える Umklapp process。

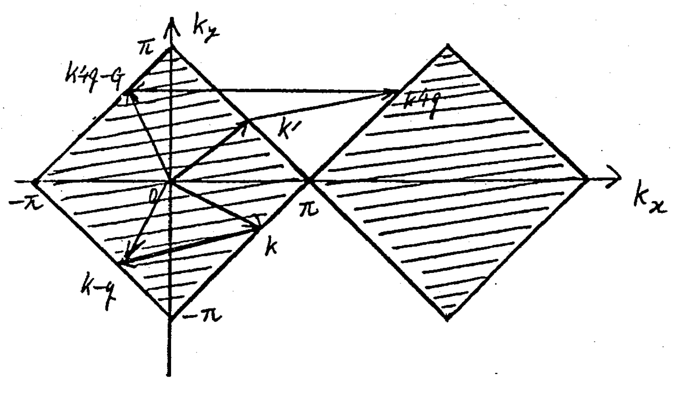

Fig 9.3　Fig9.2と同じモデルで，$\mathrm{Im}\Sigma \propto T^2$ を与える Umklapp process。

合，half-filled において，フェルミ面上に van Hove singularity を有し，Fig9.1でいえば点（$\pm\pi,0$），（$0,\pm\pi$）がそれに相当する。今はとりあえず，これの存在を忘れて，その効果を後で考察することにしょう。向かい合う平行なフェルミ面（線）は，1次元系のフェルミ面と本質的に同じであり，Fig9.2に示すような散乱過程によって準粒子は T に逆比例した寿命をもつことになる。van Hove singularity については適当にカット・オフをおくと Fig9.2の散乱過程に対して次のようになる。

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)=-\frac{U^2}{64}T\int dK'_y\int dQ_y\frac{1}{4t^2|(\cos K'_y+\cos(K'_y+Q_y))\cos(K_y-Q_y)|} \qquad (9.1)$$

但し，dispersion は次のように変数変換して変形した。

$$E_k=-t(\cos k_x+\cos k_y)=-2t\cos\frac{k_x-k_y}{2}\cos\frac{k_x+k_y}{2}$$
$$=-2t\cos K_x\cos K_y \qquad (9.2)$$

$$K_x=\frac{k_x+k_y}{2} \qquad K_y=\frac{k_x-k_y}{2}$$
$$(9.3)$$
$$Q_x=\frac{q_x+q_y}{2} \qquad Q_y=\frac{q_x-q_y}{2}$$

このような Umklapp scattering はフェルミ面上のすべての波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ について可能であり，準粒子は温度 T に逆比例した寿命をもつことになる。また，Fig9.3のような2次元的な散乱も half-filled において可能である。この場合は $\mathrm{Im}\Sigma$ は上と同様にして，次のように与えられる。van Hove singularity に対する k,q のカット・オフを ε として，

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)=-\frac{U^2}{32\pi}T^2\frac{1}{t^2|\cos K_x|}|\cot\varepsilon| \qquad (9.4)$$

ここで K_x は，上記と同じ意味である。これは通常のフェルミ液体的な T^2 に逆比例したダンピングを与える。Fig9.3で示される散乱過程も全てのフェルミ面上の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ について許される。ゆえに，half-filled においては Umklapp process による $\mathrm{Im}\Sigma$ の温度依存性は，Tに比例する部分と T^2 に比例する部分により主として与えられる。従って，主要項は $\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)\propto T$ で与えられる。half-filled である限り，電子-電子散乱による電気抵抗は T に比例することになる。A. Virosztek and J. Ruvalds〔18〕は基本的にこれと同じ考えに立って酸化物高温超伝導体の Normal state における T に比例した電気抵抗の起源を説明しようとしている。しかし，現実の酸化物高温超伝導体では，ホールが dope されて，フェルミ面が，half-filled から，ずれた状態の Normal state において，T に比例した電気抵抗が観測される。half-filled からずれれば，フェルミ面の内，nest している領域は，狭くなる。また，Fig9.2のような T に比例する $\mathrm{Im}\Sigma$ を与える Umklapp process は，温度によるフェルミ面のボケを考えない限り，half-filled 以外では，特定の $\boldsymbol{k}$ についてし

か許されない。これに対して，Fig9.3で示される散乱過程はhalf-filledからはずれても，全ての$\boldsymbol{k}$について可能である。従って，準粒子には波数ベクトル$\boldsymbol{k}$によって，T^2に逆比例して減衰するものと，Tに逆比例して減衰するものの2種があり，電気伝導は，主として，寿命の長い準粒子によって担われるので，電気抵抗はT^2に比例することになる。また，たとえ，温度によるフェルミ面のボカシを考慮しても，1次元系の電気抵抗の場合に既に見たように$\mathrm{Im}\Sigma$のTに比例する項の係数は，half-filledからずれるに従って，指数関数的に小さくなる。half-filledからのずれをΔkとすると，T-linearであるためには，$T \gtrsim \Delta k v_F$でなければならない。酸化物高温超伝導は，carrier濃度は小さく，Cu−Oの格子当たり，～0.1のオーダーである。v_Fについて，Harrisonの計算に従って，$v_F \sim 1.3\times10^5\mathrm{m/s}$とすれば，$\Delta k v_F \sim 1000\mathrm{K}$となる〔17〕。High-$T_C$系では，室温度から$T_C$の範囲まで抵抗は$T$に比例しており，これは，上のような機構では説明できない。

また，以上では，van Hove singularityの寄与は考えなかった。実際には，van Hove singularityは，3次元方向へのCouplingや，温度によるフェルミ面のボケによってカット・オフされる。これは，係数に，T依存性を生じさせる。上記の中のカット・オフεは$\varepsilon \sim T/t$でおきかえられる。(9.4)は次のようになる。

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0) = -\frac{U^2}{32\pi}T^2\frac{1}{t^2|\cos K_x|}\left|\cot\frac{T}{t}\right| \sim -\frac{U^2}{32\pi}T^2\frac{1}{t^2|\cos K_x|}\frac{2t}{T}$$

$$= -\frac{U^2}{32\pi}\frac{T}{t|\cos K_x|} \tag{9.5}$$

従ってTに比例することになる。また，(9.1)は，$\varepsilon\to0$で対数発散を示すことから，係数に$\log T$のT依存性が生じると考えられる。P. A. LeeとN. Read〔19〕は，2次元正方格子で，half-filled近くでのnestingとvan Hove singularityの双方の寄与により，$\mathrm{Im}\Sigma\propto T$が導かれることを主張しているが，$\mathrm{Im}\Sigma\propto T$は，perfect nestingにより（正確には，ある方向にdispersionが存在しないことにより）生ずるのであり，van Hove singularityは，むしろ，Tに比例する項の係数を発散させる。P. A. Lee et alと我々の結果が異なるのは，P. A. Lee et alは，$\mathrm{Im}\chi$及び$\mathrm{Im}\Sigma$の計算において，波数ベクトル$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}$についての和を正確に実行しなかったためであると思われる。$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}$についての和を正確に実行すれば，彼等の結果を得ることはできない。

また，§3の最後でも指摘したように$\mathrm{Im}\Sigma\propto T$を得るには，perfect nestingだけでは不充分であり，ある方向のdispersionが存在しないことが必要である。Virosztek et alやLee at alは，transferされる運動量$\boldsymbol{q}$を$\boldsymbol{Q}$もしくは，その近傍に限っているために$\mathrm{Im}\Sigma\propto T$を得ることができたのであり，$\boldsymbol{q}$についての和を正確に行えば，perfect nestingすなわち$E_k+E_{k-Q}=0$の条件だけからは，$\mathrm{Im}\Sigma\propto T$は得られない。実際，§3の最後で指摘したように，dispersionの形によっては，$E_k+E_{k-Q}=0$であっても$\mathrm{Im}\Sigma$のT^2項の係

数は対数発散を与える場合がある。この場合には，恐らく，$\mathrm{Im}\Sigma\propto T^2\ln\frac{\mu}{T}$ が成立していると思われる。

§10. 結語

低次元フェルミ粒子系のいくつかの性質について見てきた。1次元では，フェルミ液体的取り扱いは $\mathrm{Im}\Sigma\propto\varepsilon$ もしくは $\propto T$ を導き，温度 $T=0$ ではフェルミ面の喪失が従った。しかし，適当な温度領域で，系はフェルミ液体的な性格を取り戻し，フェルミ液体論に従って，電気抵抗を計算することができた。電気抵抗は T に比例し，half-filled から，フェルミ・エネルギーがずれるにともない，係数は，指数関数的に減衰する。

$\mathrm{Im}\Sigma\propto T$ の起源をフェルミ面の perfect nesting に帰することは，厳密には正しくない。ある方向に dispersion が存在しないことが必要である。

2次元フェルミ粒子系では，$\mathrm{Im}\Sigma\propto T^2\ln\frac{E_F}{T}$ もしくは，$\propto\varepsilon^2\ln\frac{E_F}{\varepsilon}$ である。しかし，これは，1次元の場合と異なり，フェルミ面の性質や，準粒子スペクトルの性格を抜本的に変更するものではない。2次元系において，フェルミ液体的な準粒子描像は常に成立していると思われる。

ところで，我々の議論では，自己エネルギーの虚数部の計算において，相互作用の vertex correction は，考慮しなかった。通常のフェルミ液体では，vertex correction が，$\mathrm{Im}\Sigma$ の温度に対する主要な依存性を変更することはない。しかし，このことは縮退したフェルミ液体の準粒子の寿命が，運動量保存を explicit に考慮することなく，決定されることに対応しているように思える。低次元系では，運動量についての積分が，$\mathrm{Im}\Sigma$ の温度依存性に抜本的な変化を与えた。一般に vertex part Γ は，運動量 $\boldsymbol{k}$ に依存するから，(2.12) は次のように変更される。

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)=-\frac{(\pi T)^2}{2}\sum_{k'q}\pi\rho_{k-q}(0)\rho_{k'+q}(0)\rho_{k'}(0)\Gamma^2(k,k',k'+q,k-q) \tag{10.1}$$

vertex part Γ の具体的な形を正確に決めるのは難しい。ここで，Γ を RPA で扱い，

$$\Gamma(k,k',k'+q,k-q)=\frac{U}{1-U\chi(q,0)} \tag{10.2}$$

と置いたとしよう。しかし，これは，2次元系に固有の singular な性質を変更するものではない。なぜならば，2次元では Free dispersion で考える限り，$|\boldsymbol{q}|\leq 2k_F$ で，$\chi(\boldsymbol{q},0)$ は定数である。従って，Free dispersion で，RPA 近似で扱う限り，我々の結果は変更されない。Γ について一般的な議論をするのは難しいが，multiple particle-hole pair excitation と，collective mode excitation を含む。前者については，フェルミ面近くでは，その振幅は小さく，フェルミ面近くのフェルミオン的な準粒子のダンピングに影響を与えると

は考え難い。後者については，電子系ではエネルギー・スペクトルにギャップをもち，$\varepsilon \to 0$ では励起されない。従って，準粒子のダンピングに影響を与えることはないと思われる。勿論，SDW などの instability は，ここでは考えていない。以上のことから，vertex correction が，準粒子のダンピングを変更することはないと考えられる。

また，2次元系の電気抵抗の温度依存性については，通常の T^2 に比例した成分のみが観測され，$T^2 \ln\frac{E_F}{T}$ は抵抗の温度依存性としてあらわれることはないことを知った。

更に，2次元系では，電気抵抗の温度依存性に対して，perfect nesting や van Hove singularity の存在が微妙な影響を及ぼす。2次元正方格子のハバード・モデルでは，half-filled において，perfect nesting があり，これは，van Hove singularity を考えない限り，T に比例した抵抗を与える。しかし，van Hove singularity の存在は，T に比例する項の係数を対数的に発散させる。これは温度でカットオフすれば $\log T$ の補正を与え，抵抗は厳密には T に比例するものではなくなる。また，half-filled からずれれば，たとえ，フェルミ面が部分的に nesting していても，$\mathrm{Im}\Sigma$ が T^2 に比例する準粒子の寄与が dominant になり，抵抗は，T^2 に比例することになる。従ってフェルミ面の nesting によって酸化物高温超伝導における電気抵抗の T に比例した振舞を説明することはできない。

謝辞

この研究を進める上で，物性理論研究室の多くの方々にお世話になりました。深く感謝の意をここに表したいと思います。

本研究のテーマに私の関心を向けて下さり，数々の有益な助言，御教示を賜った山田先生に，深く感謝いたします。また，恒藤先生，大見先生，町田先生には有益な議論をしていただき，問題点等を種々指摘していただきました。深く感謝いたします。物性理論研究室の方々には，多くの有意義な議論をしていただきした。特に河野浩氏には，この研究を始めた当初より，完成に到るまで，数限りない議論を重ねていただき，また，サポートし続けていただきました。甚々の感謝の意を表したいと思います。また，その他，稲垣博士，池田（隆）博士，中野氏達にも，有益な議論，助言を賜りました。深く感謝いたします。

Appendix

2次元系の自己エネルギーの虚数部の異常 —— 一般の dispersion について

§5で見たように，2次元系では，自己エネルギーの虚数部の T^2 項に対数発散を生じる。ここでは，これが無摂動状態でのバンドの形 E_k に依らないことを見る。発散への寄与は，$\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{k}''=\boldsymbol{k}$ の散乱過程，あるいは，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ の赤外発散によるものであった。そこで，この近傍での積分から，対数発散をとり出す。自己エネルギーの虚数部の T^2 項は，U

の2次までのオーダーで，次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)&=-\frac{(\pi T)^2}{2}U^2\sum_{k'q}\pi\rho_{k-q}(0)\rho_{k'}(0)\rho_{k'+q}(0)\\&=-\frac{(\pi T)^2}{2}\pi U^2\sum_{k'k''}\delta(\mu-E_{k'})\delta(\mu-E_{k''})\delta(\mu-E_{k-k''+k'})\\&=-\frac{(\pi T)^2}{2}\pi U^2\int\frac{dk'_x dk'_y}{(2\pi)^2}\frac{dk''_x dk''_y}{(2\pi)^2}\sum_{ijl}\frac{\delta(k^{(i)}-k''_x)\delta(k^{(j)}-k''_y)\delta(k^{(l)}-k'_y)}{\left|\dfrac{\partial(E_{k'},E_{k''},E_{k-k''+k'})}{\partial(k''_x,k''_y,k'_y)}\right|}\\&=-\frac{T^2}{32\pi}U^2\int dk'_x\sum_{ijl}\frac{1}{\left|\dfrac{\partial(E_{k'},E_{k''},E_{k-k''+k'})}{\partial(k''_x,k''_y,k'_y)}\right|_{\substack{k''_x=k^{(i)}\\k''_y=k^{(j)}\\k'_y=k^{(l)}}}}\end{aligned}\tag{A.1}$$

ただし，状態密度 $\rho_k(0)=a_k\delta(\mu-E_k{}^*)$ の多体効果による，くりこみは無視した。a_k の補正は重要ではない。何故なら，2行目から3行目に移行するとき，ヤコビアンに含まれる $E_k=a_k(E_k+\mathrm{Re}\Sigma_k)$ にかかっている a_k と，$\rho_k(0)$にかかっている a_k が打ち消し合うからである。また，$\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}''$ として，$\boldsymbol{q}$ についての積分を $\boldsymbol{k}''$ についての積分におきかえた。$k^{(i)}, k^{(j)}, k^{(l)}$ は，それぞれ，$E_{k'}=\mu$，$E_{k''}=\mu$，$E_{k-k''+k'}=\mu$ を，k''_x,k''_y,k'_y について解いた解であり，複数の解が可能なので，添字 i，j，l をつけて，すべての解について和をとる。積分の分母にあらわれたヤコビアンは次式で与えられる。

$$\frac{\partial(E_{k'},E_{k''},E_{k-k''+k'})}{\partial(k''_x,k''_y,k'_y)}=\frac{\partial E_{k'}}{\partial k'_y}\left\{\frac{\partial E_{k''}}{\partial k_x''}\frac{\partial E_{k-k''+k'}}{\partial k''_y}-\frac{\partial E_{k''}}{\partial k''_y}\frac{\partial E_{k-k''+k'}}{\partial k''_x}\right\}\tag{A.2}$$

singularity に寄与するのは $\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{k}''=\boldsymbol{k}$ もしくは $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ の過程であるので，まず，$\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{k}''=\boldsymbol{k}$ の近傍を見るため $\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''$ を次のように置く。

$$\begin{aligned}&k'_x=-k_x+\tilde{k}'_x \qquad k'_y=-k_y+\tilde{k}'_y\\&k''_x=k_x+\tilde{k}''_x \qquad k''_y=k_y+\tilde{k}''_y\end{aligned}\tag{A.3}$$

ここで，$\tilde{k}'_x$etc は微小量とし，$\tilde{k}'_x\ll k_F$ とする。

$E_k=f(k_x, k_y)$ とおき，k_x 軸，k_y 軸について対称であると仮定する。すると，$\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{k}$ の近くで，$\dfrac{\partial E_{k''}}{\partial k''_x}$etc は次のようにあらわされる。

$$\frac{\partial E_{k''}}{\partial k_x''}=\frac{\partial f(k_x,k_y)}{\partial k_x}+\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k^2_x}\tilde{k}''_x+\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k_x\partial k_y}\tilde{k}''_y+O(\tilde{k}_x''^2,\tilde{k}_y''^2)\tag{A.4a}$$

$$\frac{\partial E_k''}{\partial k_y''}=\frac{\partial f(k_x,k_y)}{\partial k_y}+\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k^2_y}\tilde{k}''_y+\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k_x\partial k_y}\tilde{k}''_x+O(\tilde{k}_x''^2,\tilde{k}_y''^2)\tag{A.4b}$$

$$\frac{\partial E_{k-k''+k'}}{\partial k_x''}=\frac{\partial E_{k-k''+k'}}{\partial(k_x-k_x''+k_x')}\frac{\partial(k_x-k_x''+k'_x)}{\partial k_x''}=-\frac{\partial f(k_x,k_y)}{\partial k_x}-\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k^2_x}(\tilde{k}_x''-\tilde{k}_x')$$
$$-\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k_x\partial k_y}(\tilde{k}_y''-\tilde{k}_y')+O(\tilde{k}_x{}^2\mathrm{etc}) \tag{A.4c}$$

$$\frac{\partial E_{k-k''+k'}}{\partial k_y''}=-\frac{\partial f(k_x,k_y)}{\partial k_y}-\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k^2_y}(\tilde{k}_y'-\tilde{k}_y'')-\frac{\partial^2 f(k_x,k_y)}{\partial k_x\partial k_y}(\tilde{k}_x'-\tilde{k}_x'')+O(\tilde{k}_x'^2\mathrm{etc}) \tag{A.4d}$$

$\tilde{k}_x'$ について1次まで残して，(A.2)に(A.4a)～(A.4d)を代入して，

$$\frac{\partial(E_k,E_{k'},E_{k-k''+k'})}{\partial(k_x'',k_y'',k_y')}=\frac{\partial f}{\partial k_y}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial k_x}\frac{\partial^2 f}{\partial k_x\partial k_y}-\frac{\partial^2 f}{\partial k^2_x}\frac{\partial f}{\partial k_y}\right)\tilde{k}_x'\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial k_x}\frac{\partial^2 f}{\partial k^2_y}-\frac{\partial^2 f}{\partial k_x\partial k_y}\frac{\partial f}{\partial k_y}\right)\tilde{k}_y'\right] \tag{A.5}$$

$E_{k}'=\mu$ より $\tilde{k}_x',\tilde{k}_y'$ は次のように関係づけられる。

$$\tilde{k}_y'=-\frac{\partial f}{\partial k_x}\Big/\frac{\partial f}{\partial k_y}\tilde{k}_x' \tag{A.6}$$

ただし，$E_k=\mu$ とおいた。(A.5)，(A.6)を(A.1)に代入して，

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0)=-\frac{T^2}{32\pi}U^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}d\tilde{k}_x'\frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial k}\left(2\frac{\partial f}{\partial k_x}\frac{\partial^2 f}{\partial k_x\partial k_y}-\frac{\partial^2 f}{\partial k^2_x}\frac{\partial f}{\partial k_y}-\left(\frac{\partial f}{\partial k_x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial k_y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial k_y}\right)^{-1}\right)\tilde{k}'_x\right|}+\Sigma'$$

$$=-\frac{T^2}{32\pi}U^2\frac{2\ln\frac{\varepsilon}{0}}{\left|\frac{\partial f}{\partial k}\left(2\frac{\partial f}{\partial k_x}\frac{\partial^2 f}{\partial k_x\partial k_y}-\frac{\partial^2 f}{\partial k^2_x}\frac{\partial f}{\partial k_y}-\frac{\partial^2 f}{\partial k_y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial k_x}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial k_y}\right)^{-1}\right)\right|}+\Sigma' \tag{A.7}$$

ここで第1項は，上述の近似が許されるような積分範囲だけをとり出したものであり，Σ' は残りの積分領域からの寄与をあらわす。むろん Σ' に含まれるすべての項は正の量であり，第1項の寄与を打ち消すことはない。ここで ε は上述の展開が許されるような小さな値であるが，有限の大きさである。これに対して，ln の中の分母は，厳密に0であるので，(A.7)の右辺第1項は対数発散している。

従って2次元系ではフェルミ面のネスティング等の，ここで問題にしている singularity よりも，強い singularity があるのでない限り，dispersion の形によらず，ImΣ の T^2-項の係数は対数的に発散している。

References

〔1〕P. W. Anderson, Science **235**, 1196 (1987)

[2] P. W. Anderson and Y. Ren, preprint
P. W. Anderson, preprint
Mechanisms of High Temperature Superconductivity, ed H. Kamimura and A. Oshiyama (Springer-Verlag)

[3] K. Yosida and K. Yamada, Prog Theor. Phys. Suppl, **No. 46**, 244 (1970)
K. Yamada, Prog. Theor. Phys. **53** 970 (1975)
P. Nozières, J. Low Temp. Phys. **17** 31 (1974)

[4] K. Yamada and K. Yosida, Prog. Theor. Phys. **76** 621 (1986)
K. Okada, K. Yamada and K. Yosida, Prog. Theor. Phys. **77** 1297 (1987)
Theory of Heavy Fermions and Valence Fluctuations, ed T. Kasuya and T. Saso, (Springer-Verlag, Berlin, 1985)

[5] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **3** 920 (1957)

[6] E. H. Lieb and F. Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **20** 1445 (1968)
A. A. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **30** 1160 (1970)
C. F. Coll, Ⅲ, Phys. Rev. **B9** 2150 (1974)
M. Takahashi, Prog. Theor. Phys. **42** 1098 (1969); **43** 1619 (1970)

[7] J. Sólyom, Adv. Phys. **28** 201 (1979)

[8] M. Ogata and H. Shiba, Preprint

[9] S. Sorella, A. Parola, M. Parrinello and E. Tosatti, Preprint

[10] L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinskii, Sov. Phys. JETP Lett. **18** 401 (1973)

[11] J. E. Hirsch, Phys. Rev. **B 31** 4403 (1985)

[12] J. E. Hirsch, E. Loh, D. J. Scalapino and S. Tang, Physica **C 153-145** 594 (1988)

[13] Y. Nagaoka, Phys. Rev. **147** 392 (1966)
W. F. Brinkman and T. M. Rice, Phys. Rev. **B2**, 1324 (1970)
S. Schmitt-Rink, C. M. Varma and A. E. Ruckenstein, Phys. Rev. Lett. **60** 2793 (1988)
B. I. Shraiman and E. D. Siggia, Phys. Rev. Lett. **60** 740 (1988); **61** 467 (1988); **62** 1564 (1989)
R. Shankar, Phys. Rev. Lett. **63** 203 (1989)
S. A. Trugman, Phys. Rev. **B 37** 1597 (1988)
X. G. Wen, Phys. Rev. **B 39** 7223 (1989)

[14] P. W. Anderson, Physics Reports **184** 195 (1989)

[15] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*

[16] A. Kawabata, Prog. Theor. Phys. **54** 45 (1975)

〔17〕 E. S. Hellman, Phys. Rev. **B** 9604 (1989)

〔18〕 A. Virosztek and J. Ruvalds, Preprint

〔19〕 P. A. Lee and N. Read, Phys. Rev. Lett. **58** 2691 (1987)

〔20〕 ret〔4〕の最初の論文

〔21〕 G. M. Éliashberg, Sov. Phys. JETP **14** 886 (1962)

〔22〕 J. M. Luttinger, Phys. Rev. **119** 1153 (1960)

〔23〕 D. Jérome and M. Weger, in *Chemistry and Physics of One Dimensional Metals* (Plenum, New York, 1977)

〔24〕 M. Kaveh, Solid St. Phys. **13** L611 (1980)

〔25〕 M. Gurritch and A. T. Fiory, Phys. Rev. Lett. **59** 1337 (1987)
ref〔2〕の３番目