物性研究 54－4(1990－7)

離散型広田方程式のソリトン解

若竹塾　成田　和明

(1990年7月2日受理)

[摘要]

広田方程式の離散版

$$i\dot{\psi}_n+(1/2)[(\alpha-\beta i)\psi_{n-1}+(\alpha+\beta i)\psi_{n+1}](1+\gamma|\psi_n|^2)-\alpha\psi_n=0$$

を提案する。この方程式の1－，2－，N－ソリトン解を調べる。

§1．序論

よく知られているように，1973年に広田によって見出された[1)]広田方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+i3\alpha|\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+i\gamma\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\delta|\psi|^2\psi=0 \tag{1}$$

$$\alpha/\gamma=\delta/\beta>0 \tag{2}$$

は，非線型 Schrödingr 方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+|\psi|^2\psi=0 \tag{3}$$

及び MKdV 方程式

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}=0 \tag{4}$$

の hybrid である。

広田方程式は渦糸の運動の研究，[3)]一次元ハイゼンベルグ・スピン鎖の研究等に応用がある。

他方，方程式(3), (4)にはそれぞれ以下のような離散版が見出されている。それらは1976年に Ablowitz 及び Ladik により研究された[4)]離散型非線型 Schrödinger 方程式

$$i\dot{\psi}_n+\psi_{n-1}-2\psi_n+\psi_{n+1}+(\psi_{n-1}+\psi_{n+1})|\psi_n|^2=0 \tag{5}$$

及び，1973年に広田により，[5]又その他の著者によって研究された離散型 MKdV 方程式

$$\dot{\psi}_n=(\psi_{n-1}-\psi_{n+1})(1+\psi^2_n) \tag{6}$$

である。

したがって広田方程式の離散版として可能な一つの方程式は，方程式(5)と(6)の hybrid, 即ち

$$i\dot{\psi}_n+(1/2)[(\alpha-\beta i)\psi_{n-1}+(\alpha+\beta i)\psi_{n+1}](1+\gamma|\psi_n|^2)-\alpha\psi_n=0 \tag{7}$$

$$\gamma>0 \tag{8}$$

であろう。

この論文では方程式(7)がソリトン解をもつか否かを調べる。

§2．ソリトン解

この節では方程式(7)のソリトン解を調べる。この目的のため，方程式(7)をまず広田の双一次型式に変換する。次の形を仮定する。

$$\psi_n=g_n/f_n \tag{9}$$

方程式(9)を方程式(7)に代入し，切離しを行うと次の双一次方程式が得られる。

$$A_1 g_n\cdot f_n=0 \tag{10}$$

$$A_2 f_n\cdot f_n=g_n g_n^* \tag{11}$$

ここに双一次演算子 A_1 と A_2 は次式のように定義される。

$$A_1=iD_t+\alpha(\mathrm{ch}D_n-1)+i\beta\,\mathrm{sh}D_n \tag{12}$$

$$A_2=(1/\gamma)(\mathrm{ch}D_n-1) \tag{13}$$

上式において D_t と D_n は次式で定義される。

$$D_t^{\alpha}D_n^{\beta}f_n(t)\cdot g_n(t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n'}\right)^{\beta}f_n(t)g_{n'}(t')\Big|_{\substack{t=t'\\ n=n'}}$$

[1-ソリトン解]

方程式(12), (13)の1-ソリトン解を求めるため，次式を仮定する。

$$g_n=\varepsilon g_n^{(1)} \tag{15}$$

$$f_n=1+\varepsilon^2 f_n^{(2)} \tag{16}$$

ここに ε は任意の小パラメーターである。方程式(15), (16)を方程式(10), (11)に代入し，ε の同冪の項を集めると，次の方程式群を得る。

$$A_1 g_n^{(1)}\cdot 1=0, \tag{17}$$
$$A_2(f_n^{(2)}\cdot 1+1\cdot f_n^{(2)})=g_n^{(1)}g_n^{(1)*}, \tag{18}$$
$$A_1 g_n^{(1)}\cdot f_n^{(2)}=0, \tag{19}$$
$$A_2 f_n^{(2)}\cdot f_n^{(2)}=0, \tag{20}$$

ここで次式を仮定する。

$$g_n^{(1)}=\mathrm{e}^{x} \tag{21}$$

$$f_n^{(2)}=a\mathrm{e}^{x+x^*} \tag{22}$$

$$x=\kappa n+\omega t \tag{23}$$

この時，方程式(17)から次式が見出される。

$$\omega=i\alpha(\mathrm{ch}\,\kappa-1)-\beta\,\mathrm{sh}\,\kappa \tag{24}$$

方程式(18)は次式を与える。

$$a=(\gamma/4)\mathrm{sh}^{-2}\frac{\kappa+\kappa^*}{2} \tag{25}$$

他の二つの方程式は恒等的に満足される。

ここで我々は $t=1$ を仮定する。この時，上の結果から方程式(7)の 1 - ソリトン解は次式のように得られる。

$$\psi_n=(1/\sqrt{\gamma})\mathrm{sh}\frac{|\kappa+\kappa^*|}{2}\mathrm{sch}\left(\frac{\kappa+\kappa^*}{2}n+\frac{\omega+\omega^*}{2}t+\phi\right)$$

$$\cdot\exp\left(\frac{\kappa-\kappa^*}{2}n+\frac{\omega-\omega^*}{2}t\right) \tag{26}$$

$$\phi=\log\left(\sqrt{\gamma}/2\mathrm{sh}\frac{|\kappa+\kappa^*|}{2}\right) \tag{27}$$

[2-ソリトン解]

方程式(10)，(11)に対する2-ソリトン解を得るため，次式を仮定する。

$$g_n=\varepsilon g_n^{(1)}+\varepsilon^3 g_n^{(3)} \tag{28}$$

$$f_n=1+\varepsilon^2 f_n^{(2)}+\varepsilon^4 f_n^{(4)} \tag{29}$$

方程式(28)，(29)を方程式(10)，(11)に代入し，ε の同冪の項を集めると，次のような方程式群が得られる。

$$A_1 g_n^{(1)}\cdot 1=0 \tag{30}$$

$$A_2(f_n^{(2)}\cdot 1+1\cdot f_n^{(2)})=g_n^{(1)}g_n^{(1)*}, \tag{31}$$

$$A_1(g_n^{(1)}\cdot f_n^{(2)}+g_n^{(3)}\cdot 1)=0, \tag{32}$$

$$A_2(f_n^{(4)}\cdot 1+f_n^{(2)}\cdot f_n^{(2)}+1\cdot f_n^{(4)})=g_n^{(3)}g_n^{(1)*}+g_n^{(3)*}g_n^{(1)}, \tag{33}$$

$$A_1(g_n^{(1)}\cdot f_n^{(4)}+g_n^{(3)}\cdot f_n^{(2)})=0, \tag{34}$$

$$A_2(f_n^{(4)}\cdot f_n^{(2)}+f_n^{(2)}\cdot f_n^{(4)})=g_n^{(3)}g_n^{(3)*}, \tag{35}$$

$$A_1 g_n^{(3)}\cdot f_n^{(4)}=0, \tag{36}$$

$$A_2 f_n^{(4)}\cdot f_n^{(4)}=0, \tag{37}$$

次に次式を仮定する。

$$g_n^{(1)}=\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}, \tag{38}$$

$$g_n^{(3)}=a(1,2,1^*)\mathrm{e}^{x_1+x_2+x_1^*}+a(1,2,2^*)\mathrm{e}^{x_1+x_2+x_2^*}, \tag{39}$$

$$f_n^{(2)}=a(1,1^*)\mathrm{e}^{x_1+x_1^*}+a(1,2^*)\mathrm{e}^{x_1+x_2^*}+a(2,1^*)\mathrm{e}^{x_2+x_1^*}+a(2,2^*)\mathrm{e}^{x_2+x_2^*}, \tag{40}$$

$$f_n^{(4)}=a(1,2,1^*,2^*)\mathrm{e}^{x_1+x_2+x_1^*+x_2^*}, \tag{41}$$

及び

$$x_1=\kappa_1 n+\omega_1 t+x_1^0, \tag{42}$$
$$x_2=\kappa_2 n+\omega_2 t+x_2^0, \tag{43}$$

この時，方程式(30)は次式を与える。

$$\omega_1=i\alpha(\mathrm{ch}\,\kappa_1-1)-\beta\,\mathrm{sh}\,\kappa_1, \tag{44}$$

$$\omega_2=i\alpha(\mathrm{ch}\,\kappa_2-1)-\beta\,\mathrm{sh}\,\kappa_2, \tag{45}$$

又，方程式(31)は次式を与える。

$$a(1,1^*)=(\gamma/4)\mathrm{sh}^{-2}\frac{\kappa_1+\kappa_1^*}{2}, \tag{46}$$

$$a(1,2^*)=(\gamma/4)\mathrm{sh}^{-2}\frac{\kappa_1+\kappa_2^*}{2}, \tag{47}$$

$$a(2,1^*)=(\gamma/4)\mathrm{sh}^{-2}\frac{\kappa_2+\kappa_1^*}{2}, \tag{48}$$

$$a(2,2^*)=(\gamma/4)\mathrm{sh}^{-2}\frac{\kappa_2+\kappa_2^*}{2}, \tag{49}$$

方程式(32)に関係式(44)，(45)を使用したものは次式を与える。

$$a(1,2,1^*)=a(1,2)a(1,1^*)a(2,1^*), \tag{50}$$

$$a(1,2,2^*)=a(1,2)a(1,2^*)a(2,2^*), \tag{51}$$

ここに$a(1,2)$は次式で定義される。

$$a(1,2)=(4/\gamma)\mathrm{sh}^2\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2}, \tag{52}$$

方程式(33)に得られた関係式(50), (51)を使用したものは次式を与える。

$$a(1,2,1^*,2^*)=a(1,2)a(1,1^*)a(1,2^*)a(2,1^*)a(2,2^*)a(1^*,2^*), \tag{53}$$

ここに$a(1^*,2^*)$は次式で定義される。

$$a(1^*,2^*)=(4/\gamma)\mathrm{sh}^2\frac{\kappa_1{}^*-\kappa_2{}^*}{2}, \tag{54}$$

この時，方程式(34)は恒等的に満足されることが見出される。方程式(35), (36), (37)も又満足される。

最終的に我々は$\varepsilon=1$とおく。このようにして得られた解は方程式(7)の二つの包絡ソリトンの衝突を表わす解となっている。

[N-ソリトン解]

方程式(10), (11)に対するN-ソリトン解は以下のように与えられる。

$$f_n=\sum_{\mu=0,1}{}'\exp\left(\sum_{i<j}^{(2N)}\varphi(i,j)\mu_i\mu_j+\sum_{i=1}^{2N}\mu_i x_i\right), \tag{55}$$

$$g_n=\sum_{\mu=0,1}{}''\exp\left(\sum_{i<j}^{(2N)}\varphi(i,j)\mu_i\mu_j+\sum_{i=1}^{2N}\mu_i x_i\right), \tag{56}$$

$$g^*{}_n=\sum_{\mu=0,1}{}'''\exp\left(\sum_{i<j}^{(2N)}\varphi(i,j)\mu_i\mu_j+\sum_{i=1}^{2N}\mu_i x_i\right), \tag{57}$$

ここに$i=1,2,\cdots,2N$に対して

$$x_i=\kappa_i n+\omega_i t+x_i{}^0, \tag{58}$$

$$\omega_i=i\alpha(\mathrm{ch}\,\kappa_i-1)-\beta\,\mathrm{sh}\,\kappa_i, \tag{59}$$

であり，$i=1,2,\cdots,N$ に対して

$$x_{i+N}=x_i{}^*, \tag{60}$$

$$\kappa_{i+N}=\kappa_i{}^*, \tag{61}$$

$$\omega_{i+N}=\omega_i{}^*, \tag{62}$$

であり，$i=1,2,\cdots,$ N および $j=N+1,$ $\cdots,$ $2N$ 又は $i=N+1,$ $\cdots,$ $2N$ および $j=1,2,\cdots,$ N に対して

$$\varphi(i,j)=\log\left[(\gamma/4)\mathrm{sh}^{-2}\frac{\kappa_i+\kappa_j}{2}\right], \tag{63}$$

であり，$i=1,2,\cdots,$ N および $j=1,2,\cdots,$ N 又は $i=N+1,\cdots,2N$ および $j=N+1,\cdots,2N$ に対して

$$\varphi(i,j)=-\log\left[(\gamma/4)\mathrm{sh}^{-2}\frac{\kappa_i-\kappa_j}{2}\right], \tag{64}$$

である。

方程式(55)—(57)において，$\sum_{\mu=0,1}{}'$ は条件

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i=\sum_{i=1}^{N}\mu_{i+N}, \tag{65}$$

の下で，$\mu_1=0,1,$ $\mu_2=0,1,\cdots,\mu_{2N}=0,1$ のすべての可能な組合せについて和をとることを意味し，$\sum_{\mu=0,1}{}''$ および $\sum_{\mu=0,1}{}'''$ はそれぞれ条件

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i=1+\sum_{i=1}^{N}\mu_{i+N}, \tag{66}$$

及び

$$1+\sum_{i=1}^{N}\mu_i=\sum_{i=1}^{N}\mu_{i+N}, \tag{67}$$

の下で $\mu_1=0,1,$ $\mu_2=0,1,$ $\cdots,$ $\mu_{2N}=0,1$ のすべての可能な組合せについて和をとることを意味し，又 $\sum_{i<j}^{(2N)}$ は $i<j$ という条件の下で $2N$ 個の要素からとられるすべての可能な対についての和をあらわす。

この N-ソリトン解は文献 1) と 5) に述べられているのと非常に似かよった数学的帰納法によって厳密に証明されるが，詳細は割愛する。

§3. 結論

広田方程式の離散版を提案した。この方程式に対して1−，2− 及び*N*-ソリトン解を求めた。

参 考 文 献

1) R. Hirota： J. Math. Phys. **14** (1973) 805.
2) R. Hirota： J. Phys. Soc. Jpn. **33** (1972) 1456.
3) G. L. Lamb, JR.： *Elements of Soliton Theory* (John Wiley & Sons, 1980).
4) M. J. Ablowitz and J. F. Ladik： Stud. Appl. Math. **55** (1976) 213.
5) R. Hirota： J. Phys. Soc. Jpn. **35** (1973) 289.