

## 29. 液晶対流系に於ける欠陥カオスのモデル

京大 理 佐々真一

## §1 Introduction

静止した流体に対して外力を加える時、外力の強さがある臨界値に到達すると、ロール構造が形成される系がしばしばある。Rayleigh-Benard(RB)系はその代表例であり、温度勾配が外力の強さに相当する。一方、薄膜化したネマティック液晶(以下、単に液晶)に対して電場を加えても、ある臨界電圧以上で対流ロール=Williams Domain(WD)が現れることが知られている。(1)液晶に於いては流体力学的モードとして速度、密度の他にディレクターと呼ばれる分子の配向方向を記述する変数がある。静止状態でディレクターをある方向に配向させて置くと、ディレクターに垂直なロールが出来易くなる。即ち、液晶の電磁流体力学的対流は異方的な系に於ける対流である。液晶対流系が研究対象として興味を持たれる理由は、パターンダイナミクスがRB系以上に多様なためである。外部電場の振動数と電圧に対してどのようなパターンが現れるかはS. Kaiのグループによって系統的に研究されている。(2)-(5)この中で、特に私が焦点を当てたいのはS. KaiがFWDと呼んだ状態である。FWDでは、ロール構造を保持しつつ、欠陥の生成消滅による動的な定常状態が実現している。このような状態は欠陥カオス或は欠陥乱流と呼ばれている。FWDに関するいくつかの興味深い実験事実があるが、理論的研究は進んでいない。これは、基礎方程式系が非常に複雑な連立偏微分方程式でために、解析的にも数値的にも理論家の手に負えないからである。このような場合、何とか工夫してまずFWDのダイナミクスを記述するモデルを与えることが第一歩である。ここではモデル構築の方法、考え方を示し、FWDのモデルを紹介する。さらに、このモデルを数値的に解いて、それが欠陥カオスを記述していることを見る。

## §2 モデルの構築

複雑な現象に対して、それを記述する簡単なモデルを構築する方法を考える。最も厳密な方法はその現象を記述すると思われる基礎方程式系から論理的手段を経て、縮約された簡単なモデルを導くことである。まず、この方法でFWDの記述を試みる。対流系の場合、対流開始点近傍に於けるダイナミクスを基礎方程式から縮約する方法は振幅方程式の方法として知られており、<sup>(6),(7)</sup> 液晶対流系についても基礎方程式系からWDの振幅方程式が導出されている。<sup>(8)</sup> FWDはWDが不安定になって生じると考えられるが、振幅方程式によると自然な条件ではWDはコントロールパラメータを変えても安定に留まっている。従って、振幅方程式ではFWDを記述できない。

そこで、基礎方程式から離れて現象の要因となる基本プロセスを考える。ロールが形成されるためには一様状態に対してある波数が線形不安定で成長する効果と、それを非線形性で抑制する効果が必要である。例えば、鉛直方向の速度  $W$  に対して、これらの効果を取り入れると、

$$\begin{aligned}\dot{W} &= RW - W^3 + \hat{D}W, \\ \hat{D} &= -(1 + \Delta)^2.\end{aligned}\tag{1}$$

ここで、 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  である。この方程式は Swift Hohenberg 方程式と呼ばれており、RB対流の代表的なモデル方程式である。 $R$ は外力の強さに相当するコントロールパラメータであり、 $R > R_c = 0$ で対流ロールが生じる。液晶は異方性流体なので、(1)式に異方性の効果を加えると、W. Pesch と L. Kramer によって導入された次式を得る。<sup>(9)</sup>

$$\begin{aligned}\dot{W} &= RW - W^3 + \hat{D}W, \\ \hat{D} &= -(1 + \Delta)^2 - \eta_1 \partial_y^4 - 2\eta_2 \partial_x^2 \partial_y^2.\end{aligned}\tag{2}$$

ディレクターの向きを  $x$  軸に選ぶと、ロールは  $y$  軸に平行に出来やすくなる。この効果は正の  $\eta_1$  によって取り入れることが出来る。また、

実験の設定条件（外場の周波数）によって、ディレクターに垂直なロール（ノーマルロール）やディレクターに対して斜めのロール（オブリクロール）が現れるが、この事実は $\eta_2$ の符号によって説明できる。

方程式(2)のロール解の安定性を調べると、振幅方程式の場合と同様に、自然なロール解は $R$ を変えても安定に留まっている。従って、(2)式ではFWDを記述できない。(2)式は異方的ロール形成能力を持っているが、乱れを起こす能力に欠けている。FWDの開始点はWDの開始点のすぐ上にあることより、FWDはWDの変調不安定性によって生じると考えられる。しかし、変調不安定性がどの様に生じるかを物理的考察によって理解するのは難しい。勿論、モデルが決まれば、そのモデルがどの様な変調不安定性を持っているかは計算できる。そこで、(2)式に大切だろうと思われる項を加えて、変調不安定性の現れ方を計算し、それが自然な条件で実現する可能性を探る。

そのために、近年のRB対流の研究によって重要性が明らかになってきたドリフト効果について考える。(10)-(14) プランドル数が非常に小さい時のRB対流の振幅方程式を求める場合、臨界モードの振幅に、遅い変数としてドリフト（=横方向の速度）が、結合することが示された。(10)また、それとは別に、中間的なプランドル数の場合においても、対流開始点から離れると、ドリフトが効いてくることが示唆された。(11)例えば、中間的プランドル数の場合に現れるskewed varicose不安定性(15)はこのドリフト効果によって説明できる。(12)-(14)しかし、このドリフトは遅い変数でない。にもかかわらず、それが重要になってくる理由を考えるために、P.Mannevilleによって提案された次のモデル方程式を見る。(13)

$$\dot{W} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})W = RW - W^3 + \hat{D}W, \quad (3a)$$

$$\hat{D} = -(1 + \Delta)^2,$$

$$\vec{U} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi), \quad (3b)$$

$$-\Delta \psi = h \hat{z} (\vec{\nabla} W \times \vec{\nabla} \Delta W). \quad (3c)$$

ここで、 $\hat{z}$ は重力と反対向きの単位ベクトルである。P. Manneville は

RB 対流の基礎方程式から、ある近似の下で、(3-b),(3-c) の表現を求め、正のパラメータ  $h$ (=ドリフトの強さ) と物理定数との対応をつけている。(13) (3) 式を少し変形すると、次式と同値であることが分かる。

$$\dot{W} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})W = RW - W^3 + \hat{D}W, \quad (4a)$$

$$\hat{D} = -(1 + \Delta)^2,$$

$$\vec{U} = hW\vec{\nabla}\Delta W - \vec{\nabla}p, \quad (4b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0. \quad (4c)$$

(4b) 式は非圧縮性条件 (4c) 式の下で、ユークリッド対称性を満たし、 $\vec{0}$  でない  $\vec{U}$  を与える最も簡単な式である。また、ドリフト場  $\vec{U}$  は非局所的に決定されることが分かる。この非局所性は非圧縮性 (圧力のタイムスケールが非常に早いこと) の帰結であり、(1) 式には含まれていない性質である。ドリフト効果は非局所性を実現するために必要になってくるのである。

さて、液晶も非圧縮性流体だから非局所的効果を期待できる。そこで、ドリフト項を加えたモデルを考える。異方性流体の場合、回転対称性を満たす必要がないので、(4) 式の形に限定されることはないが、簡単のためにドリフト効果については異方性を考慮しないと仮定すると次のモデル方程式を得る。

$$\dot{W} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})W = RW - W^3 + \hat{D}W, \quad (5a)$$

$$\hat{D} = -(1 + \Delta)^2 - \eta_1 \partial_y^4 - 2\eta_2 \partial_x^2 \partial_y^2,$$

$$\vec{U} = hW\vec{\nabla}\Delta W - \vec{\nabla}p, \quad (5b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0. \quad (5c)$$

(5) 式のロール解の安定性を解析的に調べることは出来ないので、 $W$  を複素化したモデルを考える。

$$\dot{W} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})W = RW - |W|^2 W + \hat{D}W, \quad (6a)$$

$$\hat{D} = -(1 + \Delta)^2 - \eta_1 \partial_y^4 - 2\eta_2 \partial_x^2 \partial_y^2,$$

$$\vec{U} = h(W^* \vec{\nabla} \Delta W + c.c) - \vec{\nabla} p, \quad (6b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0. \quad (6c)$$

ここで、 $Re(W)$  が速度の鉛直成分に相当する。モデル方程式 (6) の平面波解（ロール解）の安定性を調べると、ドリフトの強さのパラメータ  $h$  が負の時に変調不安定性（ジグザグ不安定性）が実現することが分かる。（図 1）ジグザグ不安定性は対流開始点近傍で異方性のために抑制されていたのが、負のドリフト効果によって復活させられたのである。負の  $h$  という性質は液晶対流系独自のもので、インバースドリフト効果と呼ぶ。 $h$  が負となる物理的機構については、まだよく分からない。

### §3 シミュレーション

モデル方程式 (6) を数値的に解いて、WD  $\rightarrow$  FWD 転移が起こることを確認する。系を大きさ  $L$  の正方形  $D$  とする。境界条件を次式で与える。

$$W|_{\partial D} = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) W|_{\partial D} = \vec{n} \cdot \vec{U}|_{\partial D} = 0. \quad (7)$$

ここで、 $\vec{n}$  は境界に垂直な単位ベクトルである。各パラメータについては、 $\eta_1 = 0.6, \eta_2 = 0.3, h = -1.0, L = 63$  を固定し、 $R$  をかえる。 $R = 0.5$  の時、ロールは安定であるが、 $R = 1.0$  にすると、ロールは自発的にゆがみ始め欠陥を対生成する。その後、いくつかの対生成・対消滅を経て動的な定常状態に到達する。欠陥の個数の時間変化を図 2 に示す。これは非周期的変動を示しており、この状態を欠陥カオスと認定できる。パターンの変化する様子を 10(time unit) 毎に見たのが図 3 である。欠陥の運動、対生成、対消滅がパターンダイナミックスの素過程であることが分かる。

§4 まとめ

液晶対流系には欠陥カオスと呼ばれる状態 (FWD) があり、それは欠陥の運動・生成・消滅を素過程としている。私は FWD のモデルを提案し、そのシミュレーションを行った。パターンの時間発展を見る限り、モデルは正しいように思える。次のステップは FWD に関するいくつかの興味深い実験事実に対して、モデルを手にした理論家がどの様なアプローチをするかである。これについては現在進行中であり、別の機会に報告したい。

§謝辞

この研究テーマに私の関心を向けさせて頂いた甲斐教授と普段から指導して頂いている蔵本教授に感謝します。

References

- 1) R. Williams, *J.Chem.Phys.* **39** (1963) 384.
- 2) S. Kai and K. Hirakawa, *Prog.Theor.Phys.Suppl.* **64** (1978) 212.
- 3) S. Kai, N. Chizumi and M. Kohno, *J.Phys.Soc.Jpn.* **58** (1989) 3541.
- 4) S. Kai, N. Chizumi and M. Kohno, *Phys.Rev.* **A40** (1989) 6554.
- 5) S. Kai and W. Zimmermann, preprint (to appear in *Prog.Theor.Phys.* )
- 6) A.C. Newell and J. Whitehead, *J.Fluid Mech.* **38** (1969) 279.
- 7) L.A. Segel, *J.Fluid Mech.* **38** (1969) 203.
- 8) E. Bodenschatz, W. Zimmermann and L. Kramer, *J.Phys. (Paris)* **49** (1988) 1875.
- 9) W. Pesch and L. Kramer, *Z.Phys.* **B63** (1986) 121.
- 15) F.H. Busse and R.M. Clever, *J.Fluid Mech.* **91** (1979) 319.
- 10) E.D. Siggia and A. Zippelius, *Phys.Rev.Lett.* **47** (1981) 835.
- 11) M.C. Cross, *Phys.Rev.* **A27** (1983) 490.
- 12) M.C. Cross and A.C. Newell, *Physica* **10D** (1984) 299.
- 13) P. Manneville, *J.Phys. (Paris)* **44** (1983) 759.
- 14) H.S. Greenside and M.C. Cross, *Phys.Rev.* **A31** (1985) 2492.
- 15) F.H. Busse and R.M. Clever, *J.Fluid Mech.* **91** (1979) 319.

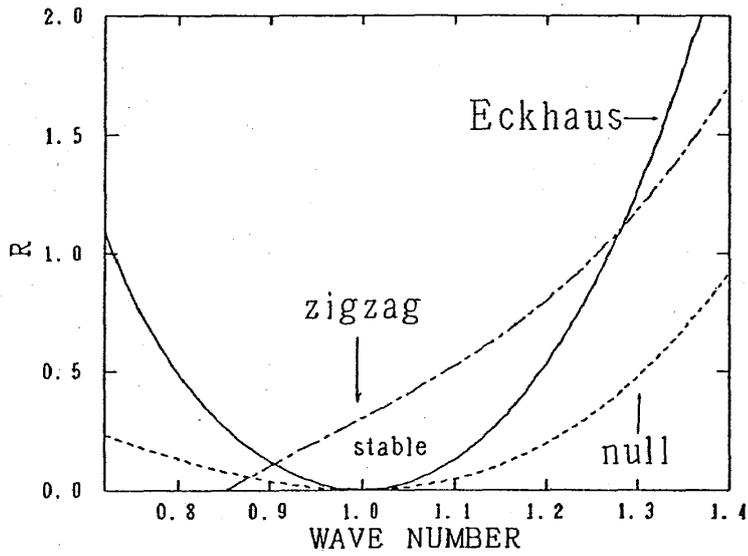


図1 Stability diagram ( $\eta_2 = 0.3$ ,  $h = -1.0$ ). Analytic expressions of the respective lines are as follows. zigzag boundary;  $R_z(k) = (k^2 - 1)^2 - \frac{k^2 - 1}{hk^2} - \frac{\eta_2}{k}$ . Eckhaus boundary;  $R_E(k) = \frac{(k^2 - 1)^2(7k^2 - 1)}{(3k^2 - 1)}$ . null amplitude;  $R_A(k) = (k^2 - 1)^2$ .

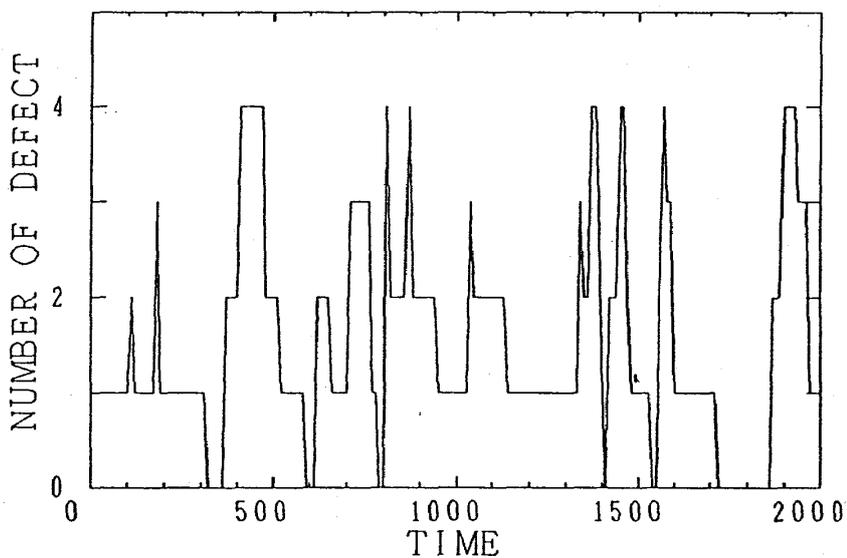
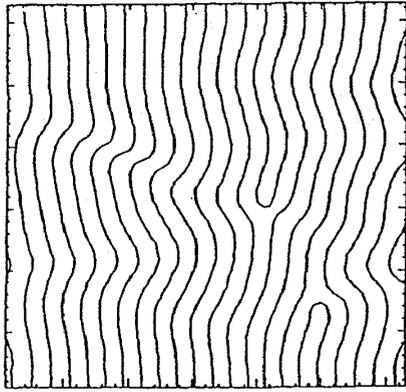
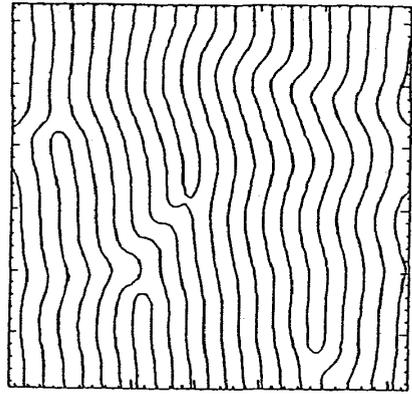


図2 欠陥の個数の時間変化

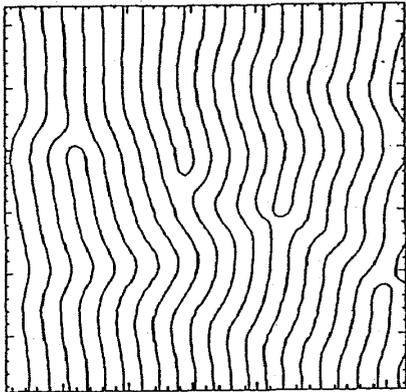
(1)



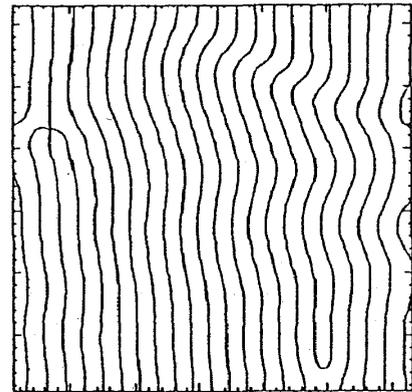
(5)



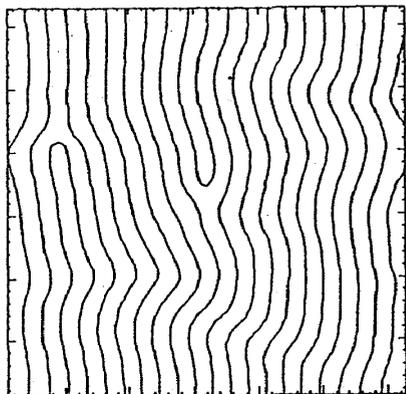
(2)



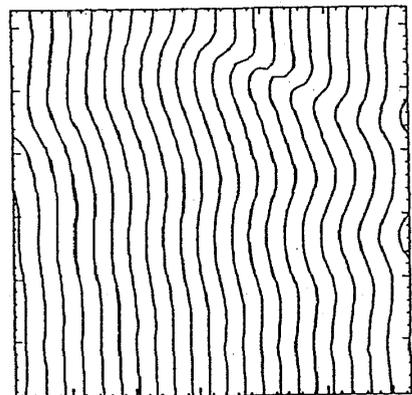
(6)



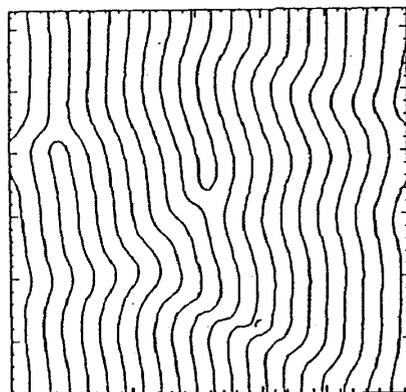
(3)



(7)



(4)



(8)

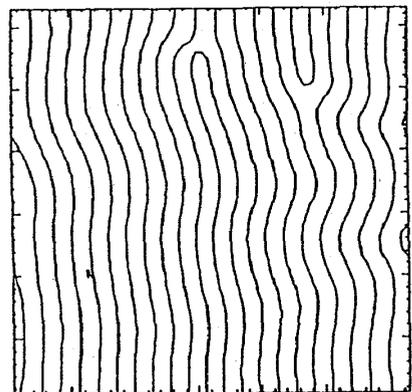


図3 パターンの時間変化 (1) → (8) The contours  $Re(W) = 0$