28. 反応拡散系における螺旋波 -Complex TDGL 方程式の場合-

大阪教育大　　古賀真史

1． 代表的な非線形化学反応系であるBelousov-Zhabotinsky(B-Z)反応系に見られるように、螺旋波（spiral wave）は、定常的に回転する波動で、回転の中心から腕がのびてそれがほぼArchimedes螺旋のパターンを形成する波動である。この螺旋波は、３次元scroll waveの２次元断面と考えられ、通常vortex pairとして観測される。

Complex TDGL 方程式は、この螺旋波を記述する最も簡単な反応拡散方程式で、Koppel Howardが研究した λ－ ω 系の特殊な場合もこれに含まれる。Complex TDGL方程式は、もともとの系が、時間的Hopf分岐を示している際にreductive purterbation法を用いて得られる方程式であり、つかえるﾊﾟﾗﾒｰﾀ領域は、制限されてはいるが、螺旋波も含めて極めて多彩な解の振舞いを示すため、反応拡散系のproto-typeの一つであるといってよい。

今回の話の目的は、

（１） 定常的に回転している螺旋波を求めることを、非線形固有値問題としてとらえ、固有値が離散的であること、固有関数の振舞いなどを、Schrodinger 方程式による方法およびShooting法を用いて議論すること

（２）非定常的に、回転している螺旋波パターンにおいて、生まれそして消えるコア（ここでは狭い意味にとり螺旋パターンを描いていなくても位相特異点をコアと呼ぶことにする）の様相を二つのコアの定義に従って議論すること

である。

2　剛体回転する螺旋波

Vortex pairでなく、一つの位相特異点のまわりに一定の角速度で回転している螺旋波を考える。位相特異点（コア）から離れるにしたがって、螺旋波はarchimedes螺旋パターンを示すと仮定する。このarchimedes螺旋は本質的にone-parameter familyである平面波であり、波数 k と振動数 ω であらわされる。波数と振動数は、分散関係によって関係づけられている。従って波数が定まればarchimedes螺旋波は、一意的に定まる。

一方回転中心である位相特異点では、数値実験などの経験から、解は振動を示さず一定の値をとり、振幅はゼロとなることがわかっている。この意味において、回転中心は、位相の定義できない点、すなわち位相特異点である。

上に述べたことがらは、定常回転する螺旋波解の満たすべき境界条件を与えている。

（2－1）非線形固有値問題

螺旋波解を求める問題は、それ自身難しい問題であるが、適当な変換によって比較的わかりやすい形になおすことができる。即ち、解 W の振幅 R と位相関数 S からある関数 ϕ を定義し、Schrodinger 方程式の形を得ることができる。ここでポテンシャル U は R と S のファンクショナルである。ポテンシャル U の漸近形は二つの境界条件からわかることから、以下のことが結論できる。

（1）エネルギーは常に負である。従って固有値 kは、離散的である。

（2）固有関数 は束縛状態をあらわす。特に基底状態は原点以外に node がないため、実際に数値実験でみられる螺旋波解に対応する。

（3）近似ポテンシャルから実際に近似固有値および近似固有関数を求めることができる。

（２－２）　Shooting 法

螺旋波解を求めることは、非線形固有値問題の性格から、あまり容易ではない。不安定解も求める立場から、ここでは改良されたshooting 法を採用することにする。

まず、r=0 と r=∞ の極限の 展開を、求める。ここで、Archimedes 螺旋の波数を k 、そして 振幅の r=0 での微分を R1 とする。この二つの量を用いて 展開が定まる。しかし、実際に計算するとわかるように、二つの展開は収束半径が重なる領域を作らないため、中間領域をなんらかのの方法で接続する必要がある。これは、数値計算上は、微分方程式を解くことで実行した。

結果は、Ｒ と Ｓ の時間発展方程式の結果と較べてある精度では正しいことがわかった。この結果から、（２－１）の（３）で述べた近似方法は、定性的には正しいことが、結論できる。

しかし、shooting 法では、r=0 でも、r=∞ でも微分方程式を解くと、指数関数より速く発散するために、厳密な固有値を得ることは、多くの場合極めて困難である。

３　不安定化した螺旋波

２次元正方格子での数値計算によると、螺旋波は不安定化し乱れた時空構造を示すことが、知られている。この乱れは、定性的には、vortex core の発生消滅として理解されている。core のまわりの巻き数がゼロでないことから、topological turbulence の代表例とみなされている。

しかしこのような定性的理解は、現在の段階では、誤りに導く可能性がある。具体的には、w=0 を core の定義とした場合
格子の中央に位置する core を除いて、周囲に core は発生消滅をするが、螺旋波としての性格、即ち core のまわりに腕がのびて Archimedes 螺旋を形成するかという事に関しては、答えは否定的である。（格子の大きさをかなり大きくしても、この事情は変わらない。）

一方、一般の反応拡散系において、螺旋波の core の定義は w=0 の定義では不十分であることが簡単な考察からわかる。即ちwの時間微分がゼロであることが core の定義である。このより一般的である core の定義を用いて再度、上に述べた事情を考察してみた。

二通りの定義に従って数値計算を境界の幅が L=32 と L=64 として実行した。境界条件は zero flux である。

（結果）

（１）パターンの乱流状態において定性的には、両者の定義は異ならない。不安定化の初期において、円状に core が連なるが、その半径は両者ほぼ同じである。さらに時間が進むと core の空間的位置はランダムなパターンを作るが両者で定性的にはその区別がつけにくい。（ここで時間は射影している。）

（２）さらに驚くことに、L=64 のほうがパターンが乱れにくいことがわかった。L=64 では、初期にできた円状の core の外側に次に再び円状の core ができ、さらに時間がたつと、さらに再びその外側に円状のパターンができ、極めて長い時間の後に、初めてパターンが乱れはじめた。このことから、螺旋波の乱流化においては、境界の影響が極めておおきいことが、わかった。

（３）方程式に実数の項をつけくわえて、リミットサイクルを歪ませた場合においても、同様な計算をおこなった。この場合には、wの時間微分がゼロであるという core の定義しか用いることができない。期待したとおり、core の空間的位置は、円を歪ませたものとなった。