

26. 興奮反応拡散系におけるドメインの振動

お茶大・理 伊藤 綾

1. はじめに

Bonhoeffer-van der Pol 型方程式について、activator u と inhibitor v の時間変化の比を決めるパラメーター τ に着目し、方程式の周期的な解が、 τ の値によってどのように変化するかを調べた。

Bonhoeffer-van der Pol 型 と呼ばれる反応拡散方程式は

$$\begin{aligned} \varepsilon \tau \partial_t u &= \varepsilon^2 \partial_x^2 u + f(u) - v \\ \partial_t v &= D \partial_x^2 v + \beta u - \gamma v \end{aligned} \quad (1)$$

但し、 $D, \varepsilon, \tau, \beta, \gamma$: 正の定数

の形をとる。ここに $f(u)$ は 3 次の非線形性をもつ。

(1) は、大ざっぱには activator u が増えれば inhibitor v も増え、今度は inhibitor の増加が抑制となって u が減少するという振舞いを示す。この方程式の使われている代表的な例として； $D = \gamma = 0$ の時、神経細胞のパルス伝達に対する Fitzhugh-Nagumo 方程式、 $v = \text{const.}$ で、時間依存 Ginzburg-Landau 方程式、そして 2 変数まで簡略化した Belousov-Zhabotinsky 反応のモデル方程式等が挙げられる。このように BVP eq. は、非平衡開放系でのパターン形成と自己組織化に対する典型的なモデル方程式である。

1 次元 BVP eq. の解として、無限媒体中に 1 つの定常興奮ドメインが存在する場合がある。パラメーターの値を適当に与えると、このドメインが振動することは、Koga-Kuramoto [1] によってなされている。

ここでは、ドメインが周期的に存在する場合について考える [2]。パラメーター τ に着目する。

(1) 式で $\varepsilon \tau \gg 1$ である時、 u に比べ v の時間変化が非常に速いので、 $\partial v / \partial t = 0$ と置くことができる。このとき $v(r)$ は Green 関数 $G(r, r')$ を用いて表せ、 u の時間変化の式は

$$\epsilon \tau \partial_t u = -\delta H / \delta u \quad H: \text{全自由エネルギー}$$

となる。このとき H は、

$$H = \frac{1}{2} \int d r \epsilon^2 (\nabla u)^2 + \frac{1}{2} \beta \int d r \int d r' G(r, r') u(r) u(r') + \int d r W(r)$$

$$\begin{aligned} \text{但し、} \quad & (-\nabla^2 + \gamma) G(r - r') = \delta(r - r') \\ & \delta W(u) / \delta u = -f(u) \end{aligned}$$

で、右辺第1項目の短距離相互作用と第2項目の長距離相互作用との競合で系の安定な状態は決まる。このことから、系は空間的周期解をもつことがわかる。

今度は、 τ が小さい場合について考える。 $D = \beta = 1$ とする。ドメインの境界は、 ϵ 程度の厚みをもつが、 $\epsilon \ll 1$ とし、境界層内での構造は無視し幾何学的な境界として扱う。以下では、 $f(u)$ を折れ線でおきかえる。

$$f(u) = \begin{cases} -u & \text{for } u < a \\ 1 - u & \text{for } u > a \end{cases}$$

2. ドメインの境界の運動方程式

周期定常解から少しずれたときパターンはどのような時間発展をするだろうか。

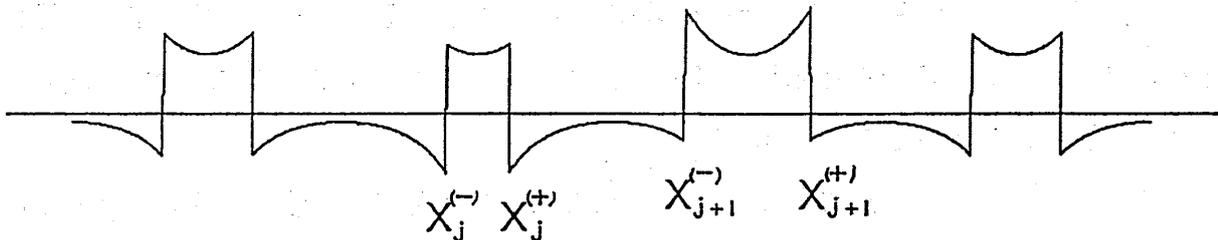


図1

図1の様に j 番目のドメインの右 (左) の境界の位置を $X_j^{(+)}$ ($X_j^{(-)}$) とする。

$$X_j^{(\pm)} = 2dj \pm X_0 + \xi_j^{(\pm)}$$

$2d$ は定常解の周期、 $2X_0$ は興奮ドメインの幅であり、 $\xi_j^{(\pm)}$ がずれを表す。系の大きさは L で、その中に N 個のパターンが含まれているとする。

ε が小さいとき、特異摂動法により、 ξ_j の発展方程式が導出できる。線形までの範囲で

$$\tau \frac{d\xi_j(t)}{dt} = 4 \{ \Gamma \xi(t) - \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \int_0^t ds \exp(-iq2d(j-m) - (1+\gamma+q^2)s) \Psi \xi_m(t-s) \}$$

(2)

$$\xi_j(t) = \begin{pmatrix} \xi_j^{(+)}(t) \\ \xi_j^{(-)}(t) \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & \exp(-2iqX_0) \\ -\exp(2iqX_0) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} \cdot \frac{\sinh\{(d-X_0)\sqrt{1+\gamma}\} \sinh\{X_0\sqrt{1+\gamma}\}}{\sinh\{d\sqrt{1+\gamma}\}}$$

となる。

3. ドメインの振動

ずれ ξ_j の Fourier 展開を ξ_K とし、① $\xi_K^{(+)} = -\xi_K^{(-)}$ ② $\xi_K^{(+)} = \xi_K^{(-)}$ の場合について考える。格子振動との対応から、各々、optical mode, acoustic mode と呼ぶことにする。基本的な変形として

- (a) optical $K=0$ mode
- (b) optical $K=K^*$ mode (但し、 $K^* = \pi/2d$)
- (c) acoustic $K=K^*$ mode
- (d) acoustic $K=0$ mode

があるが、(2) 式の数値解析の結果、 τ を小さくしていくと最初に不安定化するのは (a) の場合であることがわかる。(図2、 $\gamma = \frac{1}{2}$ 、 $d = 2$ 、)

理由は、次のように、定性的に説明できる。

まず、最初の (1) 式に戻る。界面が何らかの理由である方向に動いたとき、その部分では u が急激に増加する。すると v が増加し今度はこれが抑制となって、 u が減り界面はもとの方向に戻る。ところが τ が小さいとき、 v の時間変化が遅いので u を抑制する働きが遅れる。その間に界面は、”行き過ぎ”る。抑制が効き

始めて 界面は逆方向に動き始めるが、やはり行き過ぎる。こうしてドメインの振動がおこる。しかしこの時、反応で生じた v が速やかに拡散すれば振動は生じない。

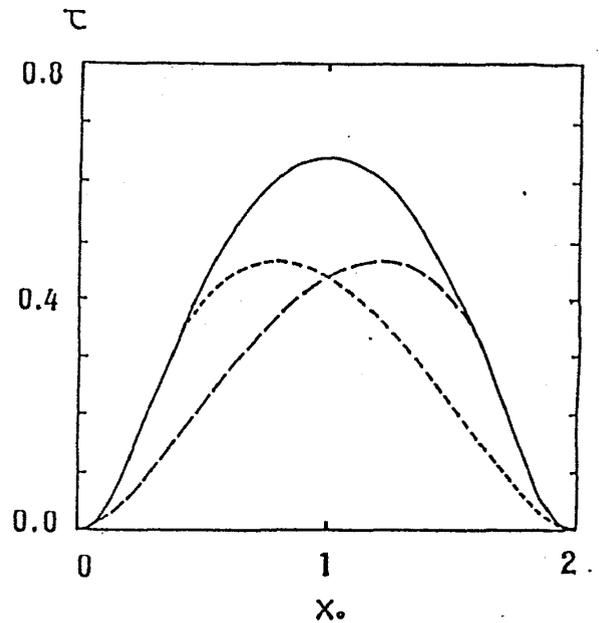


図2: (a) ———, (b) - - - - -, (c) - · - · - ·

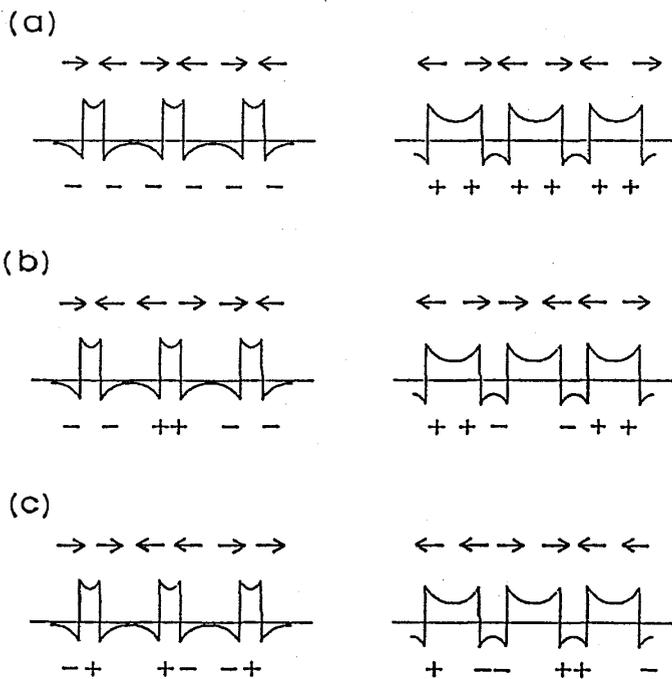


図3

図3は、各モードについて、ある瞬間の界面の動く方向とその時の v の増 (+) 減 (-) を示したものである。+ と - が接近していると拡散が速く、不安定になりにくい。Optical $K=0$ mode では、+ · - 対が生じず拡散が起こりにくいので、最初に不安定化する。

参考文献

- [1] S.Koga and Y.Kuramoto, Prog. Theor. Phys. 63(1980),106
- [2] T.Ohta and A.Ito and A.Tetsuka, Phys. Rev. A (submitted)