マクロ変数の運動方程式

慶大・理工　角野雅芳
福田礼次郎

物理系の基本変数は量子的な変数であって，ゆらぎをもっている．ところが，$\hbar \to 0$にすると，すべてのミクロな変数は古典的変数となってゆらぎを失う．しかし現実には $\hbar \neq 0$であるから，古典的変数などというものは存在しない．では我々が通常古典系と呼んでいて決定論的な運動方程式を適用している系の変数は一体何なのだろうか．実は，それがマクロ変数であり，我々が日常のレベルでみているゆらぎのない変数なのである．例えば，マクロな系の重心 X $(X = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \hat{q}_i/N)$ などのような変数がマクロ変数である．さらに我々がみることのできる変数はマクロ変数のみであり，ミクロな変数は我々の目から隠れているのである．このミクロなゆらぎのある変数のおかげで，例えば原子はつぶれないで存在できることはよく知られている通りである．

では何故系の粒子数 $N \to \infty$ となると，マクロ変数 X はゆらぎを失うのだろうか．それをみるためには，時間発展核 K を考えるとよい．この系のラグランジアンを $L = L(\varphi_1, \cdots, \varphi_N, \dot{\varphi}_1, \cdots, \dot{\varphi}_N)$ とすると，K は，径路積分表示を用いて，

$$K = \int [\prod_{i=1}^{N} d\varphi_i] e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_I}^{t_F} dt L(\varphi_1, \cdots \varphi_N)} \qquad \cdots(1)$$

とかける．$\varphi_i = X + \varphi_i'$ のように φ_i を重心 X と相対座標 φ_i' にわけると，

$$K = \int [dX] \int [\prod_i d\varphi_i'] e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_I}^{t_F} dt \{N L^{(0)}(X) + \sum_{i=1}^{N-1} L^{(1)}(X, \varphi_i') + \sum_{i=1}^{N-1} L^{(0)}(\varphi_i')\}} \qquad \cdots(2)$$

と書くこともできる．上式をみながら，$N \to \infty$ とすると，$\int [dX]$ 積分に寄与する径路 $X = X(t)$ は，定常位相を与える $X(t)$ であり，X は決定的なゆらぎのない変数になることがわかる．ところが，相対座標 $\{\varphi_i'\}$ は，$N \to \infty$ でもゆらぎを失わない．一方 $\hbar \to 0$ の古典極限では，(1)式をみると，定常位相を与える古典的径路のみが $\int [\prod_i d\varphi_i]$ 積分に寄与し，すべての変数 $\{\varphi_i\}$ がゆらぎを失ってしまう．

このようにマクロ変数と古典変数はともにゆらぎのない変数であるので，従来それらの変数の区別があいまいであり，マクロ系の変数は古典変数であるなどという荒っぽい言い方がされてきたが，両者は区別しなければならない．では一体その違いはどこにあるのだ

ろうか．実は，運動方程式に大きな違いがあらわれるのである．古典的変数は，古典的な作用の停留で運動が決まるが，マクロ変数は，その母関数 $W_{\rho_0}[j_1,\ j_2]$ をルジャンドル変換して得られる有効作用 $\Gamma_{\rho_0}[X_1,\ X_2]$ を用いて

$$\left.\frac{\delta\Gamma_{\rho_0}[X_1,\ X_2]}{\delta X_1(t)}\right|_{X_1=X_2=X}=0 \qquad \cdots(3)$$

で運動が決まる．そして，マクロ変数の運動方程式は，運動方程式自体が，初期状態 ρ_0 の特徴を表す変数（例えば初期の波動関数の平均的なひろがり幅 η など）に依存している所が，古典変数の運動方程式と大きく異なる．

研究会では，重心をマクロ変数の例にとって，マクロ変数の運動方程式(3)を導出し，相互作用がある場合には，有限時間の場の理論のグラフのルールを用いて摂動的なマクロ変数の運動方程式を求めることができることを示した．さらに，$V(\varphi)=\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ の非調和項がある場合に，具体的に初期状態密度 ρ_0 を $\langle q_1{}^i|\rho_0|q_2{}^i\rangle=\mathrm{e}^{-\eta_i(q_1{}^i-q_2{}^i)^2}$ $(i=1\sim N)$ としてマクロ変数の運動方程式を λ の２次まで求めた．その結果は，作用が

$$S_N[\varphi_i]=\sum_{i=1}^{N}\int_{t_I}^{\infty}\mathrm{d}t\left\{\frac{m}{2}\dot{\varphi}_i{}^2-\frac{m}{2}\omega_i{}^2\varphi_i{}^2-\frac{\lambda}{4!}\varphi_i{}^4\right\} \qquad \cdots(4)$$

なる系を考えると，重心 $X(t)$ の運動方程式は，

$$m\ddot{X}(t)+m\Omega^2X(t)+\frac{\lambda}{3!}X(t)^3+\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\lambda}{2}G_{\eta_i}(t,\ t)X(t)\right.$$

$$\left.+2\lambda^2\omega_i{}^4\int_{t_I}^{t}\Delta^i(t-s)X(s)\mathrm{d}s+\lambda^2X(t)\int_{t_I}^{t}G_{\eta_i}(t,\ s)\Delta^i(t-s)\frac{X(s)^2}{2}\mathrm{d}s+\cdots\right\}=0 \qquad \cdots(5)$$

となる．（＋… の部分は式が長いので省略した．）但し，

$$\begin{cases}\Omega^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i{}^2, \\ \Delta^i(t-s)=\theta(t-s)\frac{\sin\omega_i(t-s)}{m\omega_i}\ ;\ \text{古典的グリーン関数}, \\ G_{\eta_i}(t,\ s)=\eta_i\frac{\sin\omega_i(t-t_I)}{m\omega_i}\frac{\sin\omega_i(s-t_I)}{m\omega_i}+\frac{1}{\eta_i}\cos\omega_i(t-t_I)\cos\omega_i(s-t_I),\end{cases}$$

とした．(5)式で記憶項は λ の２次からあらわれていることに注意したい．また λ の２次では非線形項が入ってきてしまうので，(5)式を解くのは簡単ではない．我々は $X(t)$ の長時間極限を検討中である．