

量子制御通信過程における 誤り確率の最適化とその比較

東京理科大・理工 大矢雅則, 須鎗弘樹

§ 1. はじめに

古典力学系における通信理論は, 1948 年頃 Shannon によってエントロピー理論として始められ, その後 Kolmogorov により測度論的に定式化され, 数学的体系として完成されている^[1]. これらの通信理論は, 信号を表す物理系が可換な構造をもつので, 可換力学系の通信理論とも言われる. これに対して光は非可換な構造をもつ量子力学によって表されるため, 光を信号とする通信過程は, 従来の可換な通信理論で完全に記述することは不可能である. そこで, 光通信過程を記述する新たな理論 (量子情報理論) が必要であり, 量子エントロピー理論^[2] の延長線上及び Helstrom によって始められた量子制御理論^[3, 4] との関連で, その理論的展開がなされている.

この報告では, それらの理論をさらに発展させるために量子通信の効率を Ohya 等によって導出された誤り確率^[5, 6] を用いて測り, それを種々の制約条件のもとで最適化する問題を考える. ここでいう制約条件とは, 入力系における量子状態のエネルギーを制御することを意味する. この最適化問題は制約条件付き非線形計画問題としてとらえることができ, ここでは, ペナルティ乗数法^[7] を用いてこれらの問題を実際に数値計算した. それらの結果から減衰過程に対応するチャネルに対して, 信号にどのような量子状態を用いれば効率のよい通信過程が考えられるかという問題について考える. 特に, コヒーレント状態とスクイズド状態を入力としたときの効率の比較を行い, その有効性を調べた. さらにパルス符号変調 (PCM) 及びパルス位置変調 (PPM) の効率の比較を上記の問題を通しておこなった.

本稿では以上のことを次の順序で述べる. まず, 第 2 節では量子力学的チャネル及び PCM と PPM による誤り確率について簡単に復習する. 次に第 3 節において入力系における量子状態のエネルギーの制約条件を定め, その下で先の最適化問題を考える. 最後に, 実際に数値計算した結果を第 4 節で列挙し, 考察を与える.

§ 2. 量子系のチャネルと誤り確率

2. 1 量子系のチャネル

一般に通信において入力系から送信された信号はどのような方式をとっても, 雑音や損失による影響によって信号の強さが弱まる. このことから量子通信過程を減衰過程とみなし, その情報伝達に光を用いるため, 以下に示すような量子論的記述^[5, 8] が必要となる.

量子力学系の数学的記述には, Hilbert 空間論がその基礎となっている. 今 \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 , \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 をそれぞれ入力系, 出力系, 雑音系, 損失系の Hilbert 空間とし,

$\mathcal{H}_k, \mathcal{K}_k$ 上の量子状態を表す密度作用素の全体を $\mathcal{S}(\mathcal{H}_k), \mathcal{S}(\mathcal{K}_k)$ で表す. 量子力学的チャネル Λ^* は, 入力状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ を出力状態 $\Lambda^* \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ へ写すある変換として定められる. この通信路のモデルは (図 1) のように表される.

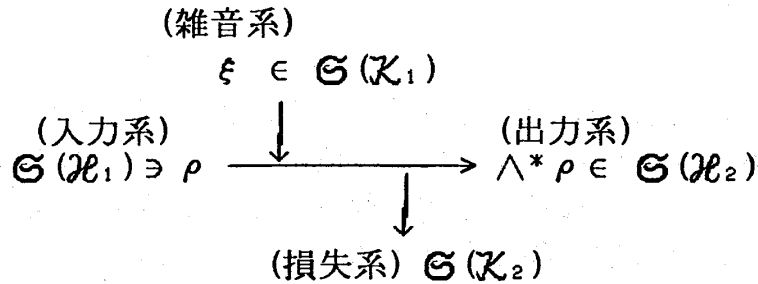


図 1 通信路のモデル

このとき, 量子力学的チャネル Λ^* は, 入力状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ に対して

$$\Lambda^*(\rho) \equiv \text{tr}_{\mathcal{K}_2} \Pi^*(\rho \otimes \xi) \quad (1)$$

で与えられる^[5, 8].

なお, 式(1)の $\xi \in \mathcal{S}(\mathcal{K}_1)$ は, 雑音の状態を表し, Π は単位元を保存する $B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ から $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ への完全正写像であり, Π^* は Π の共役写像を表している. すなわち, Π が完全正写像であるとは, 任意の自然数 n と任意の $A_j \in B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ と任意の $B_k \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ に対して

$$\sum_{j,k} B_j^* \Pi(A_j^* A_k) B_k \geq 0$$

が成り立つことをいう. ただし, $B(\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{K}_k)$ は $\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{K}_k$ 上の有界線形作用素の全体を表す. 一方, Π^* が Π の共役写像であるとは, 任意の $A \in B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ と任意の $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ に対して

$$\text{tr} \Pi^*(\sigma) A = \text{tr} \sigma \Pi(A)$$

が成り立つことをいう. また, $\text{tr}_{\mathcal{K}_2}$ は部分トレースで任意の $Q \in B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ に対して

$$\langle \Phi_1, \text{tr}_{\mathcal{K}_2} Q \Phi_2 \rangle = \sum_n \langle \Phi_1 \otimes \Psi_n, Q \Phi_2 \otimes \Psi_n \rangle$$

を満たす. ただし, Φ_1, Φ_2 は任意の \mathcal{H}_2 の元であり, $\{\Psi_n\}$ は \mathcal{K}_2 の完全正規直交系である.

2.2 誤り確率

次に、量子信号系の入力状態が上述したチャンネルで伝送された時のパルス符号変調 (PCM) とパルス位置変調 (PPM) の誤り確率の一般式を与える^[5,6]。

今、入力状態 $\rho \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$ の量子符号化について考える。この状態は、符号シンボル "0" に対して、入力系の真空状態 (光を何も送らない状態) を表す密度作用素 $E_{1,0}$ を、"1" に対してはある光量子状態 F を対応させる。

ここでは簡単のため、チャンネルにおける雑音は真空による雑音のみとする。したがって、誤り確率を考えると、"0" が誤って "1" になる場合について考える必要はなく、"1" が誤って "0" となる場合についてのみ考えればよい (Z型通信路)。

今、入力状態 F がチャンネル Λ^* によって状態 $\Lambda^*(F)$ に移されたとき、状態 $\Lambda^*(F)$ が $E_{2,0}$ (出力系の真空状態) に誤る確率は次のようになる：

$$\begin{aligned} q_0 &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \Lambda^*(F) E_{2,0} \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \text{tr}_{\mathcal{K}_2} \Pi^*(F \otimes \xi) E_{2,0} \end{aligned} \quad (2)$$

このとき、重み (符号語の中に含まれる "1" の個数) が N である符号語を考えると、チャンネル Λ^* でこの符号語を送ったときの出力系における受信語の j 重誤り確率 $P^{(j)}$ は次のようになる。

$$P^{(j)} = \binom{N}{j} q_0^j (1 - q_0)^{N-j} \quad (3)$$

ここで

$$\binom{N}{j} = \frac{N!}{j! (N-j)!} \quad (4)$$

である。よって、PCM を用いたとき、重みが N である符号語が誤って伝送される確率 P_{PCM} は

$$P_{\text{PCM}} = \sum_{j=t_0+1}^N \binom{N}{j} q_0^j (1 - q_0)^{N-j} \quad (5)$$

となる。ただし、 t_0 は誤り訂正能力を表す。

次に PPM の場合を考えると、ある量子符号語に対して一つの光パルスが出されるので、 $\Lambda^*(F)$ が $E_{2,0}$ となる確率が誤り確率 P_{PPM} であり

$$P_{\text{PPM}} = q_0 \quad (6)$$

となる。

以上より、符号シンボル "1" に対応する光量子状態 F にどのような量子状態を用意すれば誤り確率が小さくなるかということが問題になる。このような観点から誤り確率 P_{PCM} , P_{PPM} を次節以降で、種々の制約の下で最適化する^[9]。

§ 3. 量子制御通信過程における最適化問題の定式化

3. 1 入力状態 F における光子数確定状態の重ね合わせの最適化

まず、入力状態 F をより一般的に光子数確定状態の重ね合わせ（混合状態）として、 F に最適な光量子状態をその重ね合わせの分布から求める。このとき、 F は次のように表せる：

$$F = \sum_{i=0}^n p_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i| \quad (7)$$

ただし、 $\{|\Phi_i\rangle\}$ は入力系 \mathcal{K}_1 の完全正規直交系を表し、 n は状態 F がとり得る光子数確定状態の最大光子数である。さらに、式(7)で表される入力状態 F に対して、 F の平均エネルギー E を次のように定義する。

$$E \equiv \sum_{k=0}^n k \cdot p_k \quad (8)$$

このとき、次のような最適化問題を設定する。

<最適化問題 I >

「関数 P_{PCM} , P_{PPM} を

$$\text{条件} \begin{cases} \sum_{i=0}^n p_i = 1, & 0 \leq p_i \leq 1 \\ E \leq C & (i = 0, \dots, n) \end{cases}$$

の下で最小化する。』

ただし、 C はある定数で、不等式 $E \leq C$ が制約条件であるから、この C をここでは制約エネルギーと呼ぶことにする。ここで F は式(7)より p_i に関する式なので、式(2), (5), (6)より上述の最適化問題の目的関数である誤り確率 P_{PCM} , P_{PPM} は p_i に関する式となる。つまり、この最適化問題を解くことによって、その制約エネルギーの下で最適な入力状態の光子数分布 $\{p_i\}$ が得られる。さらに、 C の値を変えることによって、そのときの誤り確率の最適値と $\{p_i\}$ の分布の変化をたどることができる。これらのことから、次のような点に的をしぼって、研究を行なった。

- (i) 制約エネルギー C と P_{PCM} , P_{PPM} の最適値の関係を求める。
- (ii) 制約エネルギー C と光子数分布 $\{p_i\}$ の関係を求める。

ところで、ここでは真空による雑音のみを考えているので、雑音 $\xi \in \mathcal{G}(\mathcal{K}_1)$ が \mathcal{K}_1 の真空状態を表すベクトル $|\Psi_0\rangle$ を用いて次のように表される場合を考える。

$$\xi = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| \quad (9)$$

このとき、入力状態 F が式(7)、雑音の状態 ξ が式(9)であるから、式(2)より q_0 を求めると

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \Lambda^*(F) E_{2,0} \\
 &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \Pi^* \left(\sum_{i=0}^n p_i |\Phi_{i,1}\rangle \langle \Phi_{i,1}| \otimes |\Psi_{0,1}\rangle \langle \Psi_{0,1}| \right) |\Phi_{0,2}\rangle \langle \Phi_{0,2}|
 \end{aligned}$$

となり、少々計算すると

$$q_0 = \sum_{i=0}^n p_i \cdot (1 - \eta)^i \tag{10}$$

というよく知られた結果が得られる。ただし、 η はチャネルの透過率と考えられる定数である。

3.2 入力状態 F におけるコヒーレント状態とスクイズド状態の比較

上記の場合に対して、入力状態 F にコヒーレント状態 F_{c_0} とスクイズド状態 F_{s_q} の重ね合わせを用い、そのエネルギー比によって、重ね合わせの比率とそのときの最適な誤り確率の関係を調べる。このとき、入力状態 F は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 F &= p_1 F_{c_0} + p_2 F_{s_q} \\
 &\quad (\text{ただし、} p_1 + p_2 = 1)
 \end{aligned} \tag{11}$$

このとき、 F_{c_0} 、 F_{s_q} の平均エネルギーを E_{c_0} 、 E_{s_q} とする。以上の設定の下で、次のような最適化問題を考える。

<最適化問題 II >

「関数 P_{PCM} 、 P_{PPM} を

$$\text{条件} \begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ 0 \leq p_i \leq 1 \quad (i = 1, 2) \\ p_1 E_{c_0} + p_2 E_{s_q} \leq C \end{cases}$$

の下で最小化する。」

C は、先と同様、制約エネルギーを表している。さて、コヒーレント状態のエネルギー E_{c_0} とスクイズド状態のエネルギー E_{s_q} の比率を以下のように設定する。

- ① $E_{c_0} : E_{s_q} = 1 : 2$
- ② $E_{c_0} : E_{s_q} = 2 : 1$
- ③ $E_{c_0} : E_{s_q} = 1 : 1$

このとき、それぞれの場合において上の最適化問題を解き、入力状態 F としてどのような比率でコヒーレント状態とスクイズド状態を用いた場合が最も効率の良い通信が得られるかを調べる。ここでは、 $p_1 + p_2 = 1$ であるから、 p_1 (コヒーレント状態の比率) と P_{PCM} 、 P_{PPM} の最適値の関係をみれば十分である。

なお、雑音 $\xi \in \mathcal{G}(\mathcal{X}_1)$ は前節と同様に与える。

以上より、入力状態 F が式(11)、雑音の状態 ξ が式(9) で与えられたとき、式(2) より q を求めることができる。

ここで、コヒーレント状態とスクイズド状態について簡単に説明する。まず、コヒーレント状態ベクトルは光子消滅作用素 a の固有状態 $|\theta\rangle$ として定義される：

$$a|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle \quad (12)$$

このとき、簡単な計算を用いて $|\theta\rangle$ を \mathcal{H}_1 の CONS $\{\Phi_n^1\}$ でフーリエ展開すると、次のように表される：

$$|\theta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\Phi_n^1\rangle \quad (13)$$

$$\lambda_n = \frac{\theta^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \quad (14)$$

ただし、 θ は複素振幅を表すパラメーターである。このとき、コヒーレント状態 F_{co} は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} F_{co} &= |\theta\rangle\langle\theta| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n \bar{\lambda}_m |\Phi_n^1\rangle\langle\Phi_m^1| \end{aligned} \quad (15)$$

特に、コヒーレント状態の複素振幅 $\theta (= \theta_1 + i\theta_2)$ に対する最小不確定性に関して、次の関係が成り立つ。

$$\Delta\theta_1^2 = \Delta\theta_2^2 = \frac{1}{4} \quad (16-a)$$

$$\Delta\theta_1^2 \cdot \Delta\theta_2^2 = \frac{1}{16} \quad (16-b)$$

次に、スクイズド状態について述べる^[10]。まず、光子生成・消滅作用素 a^* , a を用いて、新たな作用素 b^* , b を

$$\begin{cases} b = \lambda a + \mu a^* \\ b^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} a \end{cases} \quad (17)$$

$$(18)$$

で定義する。ここで、 λ, μ は複素数を値にとるパラメーターで、

$$|\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1 \quad (19)$$

を満たす。このとき、 b^* と b には次の関係が成り立つ。

$$[b^*, b] = I \quad (20)$$

この新しい消滅作用素 b の固有状態をスクイズド状態ベクトルという。

$$b|\theta; \lambda, \mu\rangle = (\lambda\theta + \mu\bar{\theta})|\theta; \lambda, \mu\rangle \quad (21)$$

先と同様に、スクイズド状態ベクトルを \mathcal{H}_1 の CONS $\{\Phi_n^1\}$ で展開すると、次のように表される：

$$|\theta; \lambda, \mu\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} s_n |\Phi_n^1\rangle \quad (22)$$

$$s_n = |\lambda|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \exp\left(-\frac{|\gamma|^2 + |\theta|^2}{2|\lambda|^2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{\mu}{2\lambda}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\lambda\mu}}\right)$$

ここで、 H_n は n 次 Hermite 多項式

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2),$$

γ は式(21)の固有値：

$$\gamma = \lambda\theta + \mu\bar{\theta} \quad (23)$$

である。ただし、 θ はコヒーレント状態ベクトルと同じ複素振幅を表している。このとき、スクイズド状態 F_{sq} は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_{sq} &= |\theta; \lambda, \mu\rangle \langle \theta; \lambda, \mu| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_n \bar{s}_m |\Phi_n^1\rangle \langle \Phi_m^1| \end{aligned} \quad (24)$$

特に、スクイズド状態の最小不確定性に対して、次の関係が成り立つ。

$$\Delta\theta_1^2 = \frac{1}{4} |\lambda - \mu|^2 \quad (25-a)$$

$$\Delta\theta_2^2 = \frac{1}{4} |\lambda + \mu|^2 \quad (25-b)$$

$$\Delta\theta_1^2 \cdot \Delta\theta_2^2 = \frac{1}{16} \quad (25-c)$$

これらの関係式より λ, μ の値によって、複素振幅の直交成分 θ_1, θ_2 の不確定性をコントロールすることができる。このことをスクイーピングといい、スクイズド状態の最大の特徴である。

以上の準備の下で q_0 を求めると

$$\begin{aligned} q_0 &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \Lambda^*(F) E_{2,0} \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \Pi^* \{ (p_1 |\theta\rangle \langle \theta| + p_2 |\theta; \lambda, \mu\rangle \langle \theta; \lambda, \mu|) \\ &\quad \otimes |\Psi_0^1\rangle \langle \Psi_0^1| \} |\Phi_0^2\rangle \langle \Phi_0^2| \end{aligned}$$

となり、さらに計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 q_0 &= p_1 \sum_{n=0}^{\infty} (1-\eta)^n |\lambda_n|^2 + p_2 \sum_{n=0}^{\infty} (1-\eta)^n |s_n|^2 \\
 &= p_1 \sum_{n=0}^{\infty} (1-\eta)^n |\lambda_n|^2 \\
 &+ p_2 \sqrt{\tau} \exp \left[\{(1-\eta)\tau - 1\} |\gamma|^2 + \{1 - (1-\eta)^2 \tau\} \left\{ \frac{\bar{\mu} \gamma^2}{2\lambda} + \frac{\mu \bar{\gamma}^2}{2\lambda} \right\} \right]
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

ただし, $\tau \equiv \{|\lambda|^2 - (1-\eta)^2 |\mu|^2\}^{-1}$ である.

§ 4. シミレーションと実験結果

4. 1 準備及び実験結果

前節で求めた各入力状態に対する誤り確率の最適化を以下の条件の下で行う.

PCM: 符号長 7, 情報ビット 4, 誤り訂正能力 1 の (7,4) BCH 符号 および
 符号長 4, 誤り訂正能力 0 の符号. ただし, 符号語の重みにより誤り
 確率の値は違うので, 各符号語の誤り確率を求め, その平均値を PCM
 の誤り確率とした.

透過率 $\eta = 0.9$

(1) 入力状態 F における光子数確定状態の重ね合わせの最適化

入力状態 F を式(7) で与え, その最大入力光子数 n が 10 の場合に最適化を
 行う.

(i) 制約エネルギー C と誤り確率の最適値の関係を調べる (図 2). ただし,
 PCM のグラフの名称は次のように表した.

PCM- : PCM (誤り訂正能力 $t_0 = 0$)

PCM+ : PCM (誤り訂正能力 $t_0 = 1$)

(ii) 制約エネルギー C を 1.0 からそれぞれの最大入力光子数の値まで 1.0 刻み
 で増やし, 光子数の分布 $\{p_i\}$ の変化の様子を調べる (図 3-5).

(2) 入力状態 F におけるコヒーレント状態とスクイズド状態の比較

入力状態をコヒーレント状態とスクイズド状態の重ね合わせで与え, そのエネル
 ギー比 $E_{c_0} : E_{s_0}$ が 1:2, 2:1, 1:1 の場合に最適化を行う (図 6-9, 表 2).
 ただし, 1:1 のとき制約エネルギーによる条件は考えないことにする. また, E_{c_0}
 と E_{s_0} の和は 6 に固定した. さらに, スクイズド状態の複素振幅の分散比
 $\Delta \theta_1 : \Delta \theta_2$ は 1:4, 1:16 でそれぞれ最適化を行う. ただし, 各グラフの名称は
 (表 1) のように表した.

$\Delta a_1 : \Delta a_2$	1:4	1:16
PCM	PCM1	PCM2
PPM	PPM1	PPM2

表 1 グラフの名称

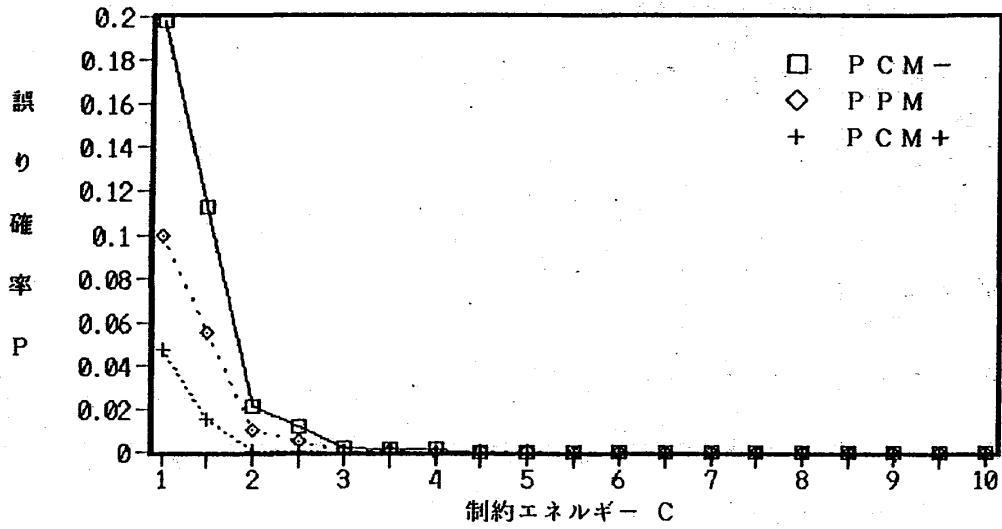


図 2 制約エネルギーと誤り確率の最適値の関係

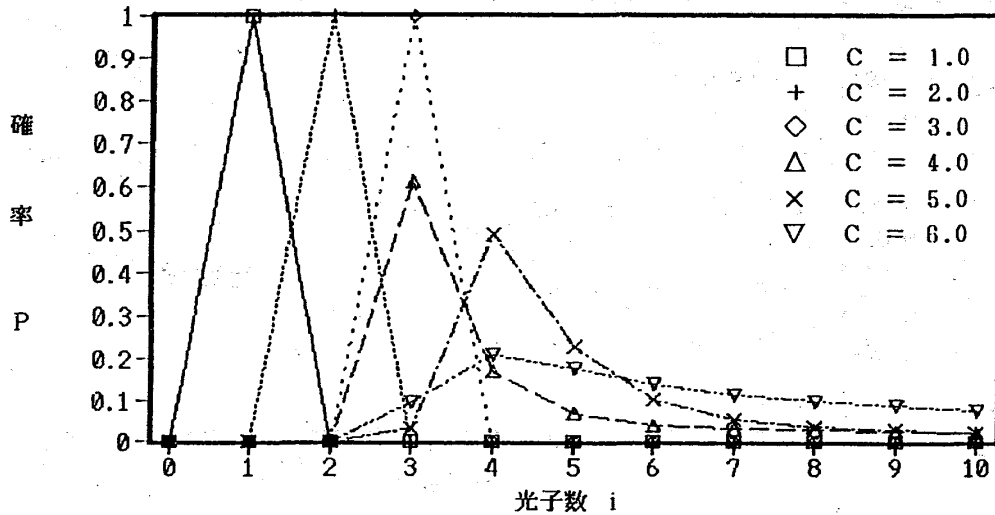


図 3 最適な入力状態の光子数分布の推移 (PCM-)

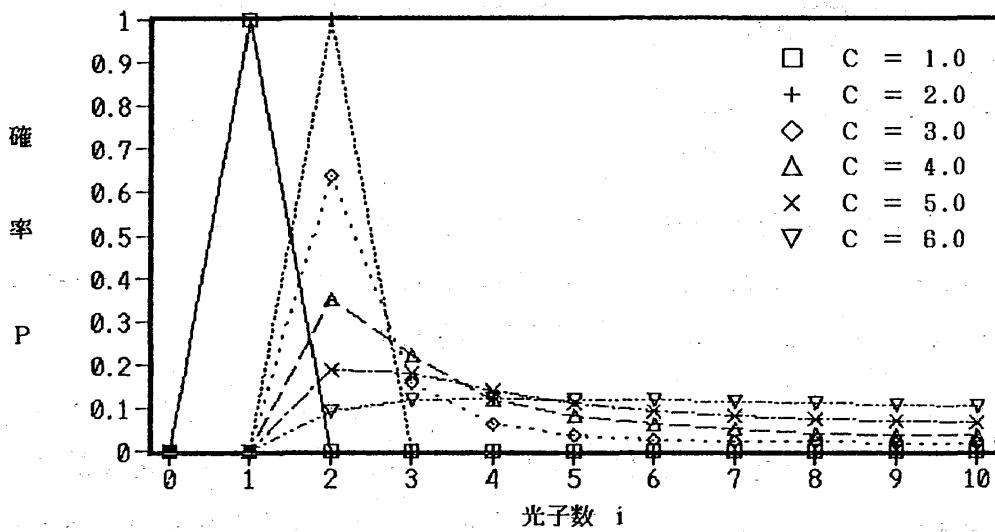


図 4 最適な入力状態の光子数分布の推移 (PCM+)

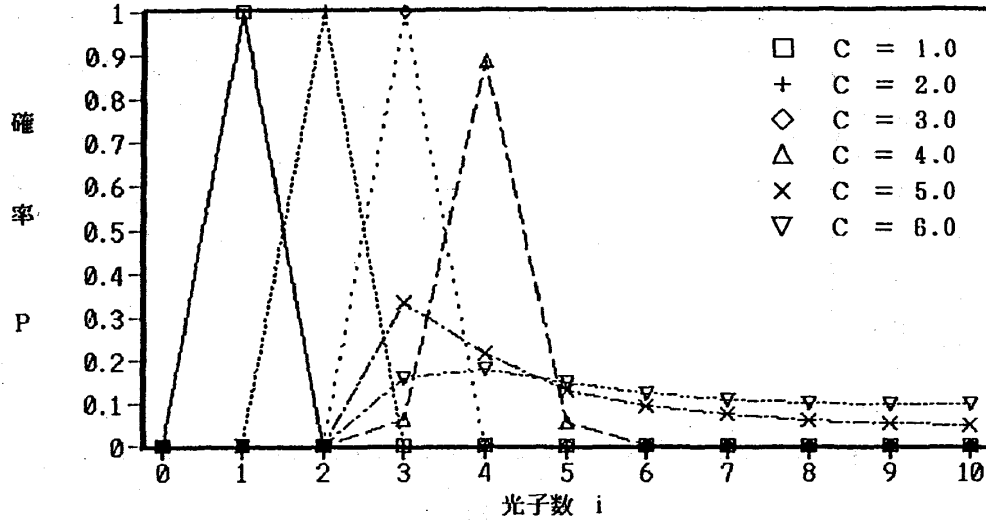


図 5 最適な入力状態の光子数分布の推移 (PPM)

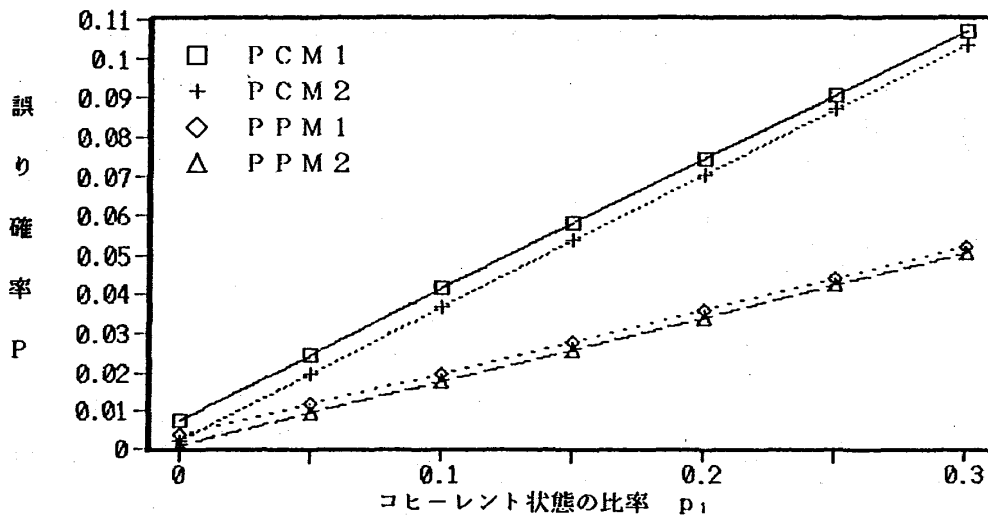


図 6 コヒーレント状態の比率と誤り確率の最適値の関係
($E_{co} : E_{sq} = 1 : 2$, 誤り訂正能力 $t_0 = 0$)

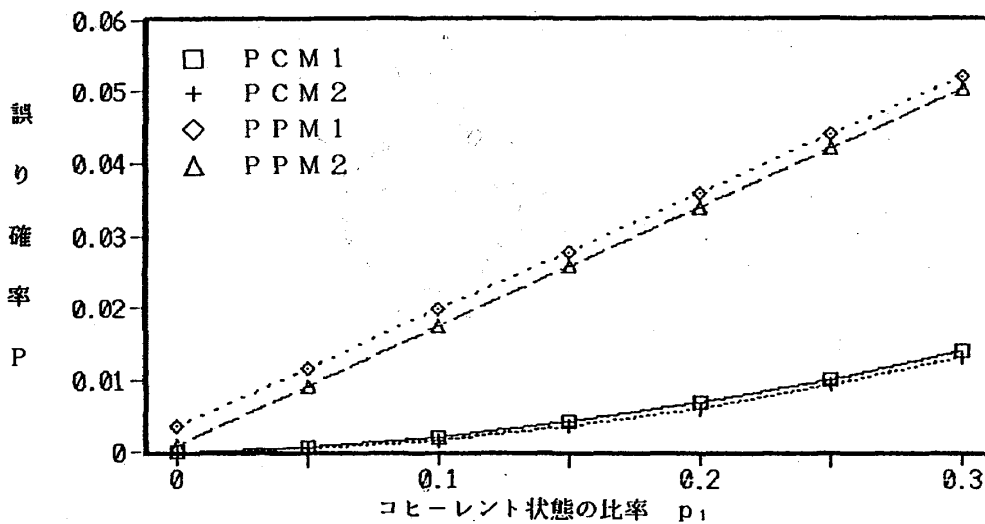


図 7 コヒーレント状態の比率と誤り確率の最適値の関係
($E_{co} : E_{sq} = 1 : 2$, 誤り訂正能力 $t_0 = 1$)

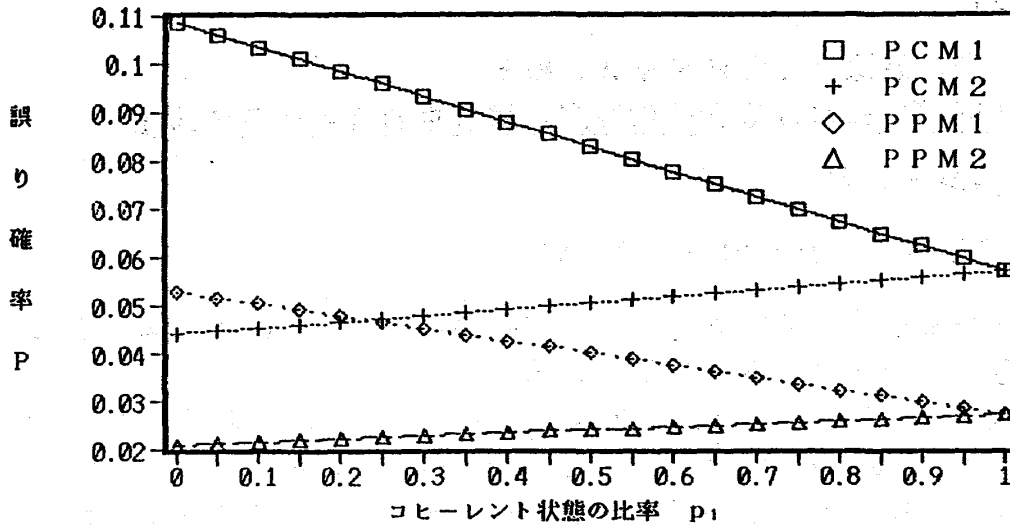


図 8 コヒーレント状態の比率と誤り確率の最適値の関係
($E_{c0} : E_{sq} = 2 : 1$, 誤り訂正能力 $t_0 = 0$)

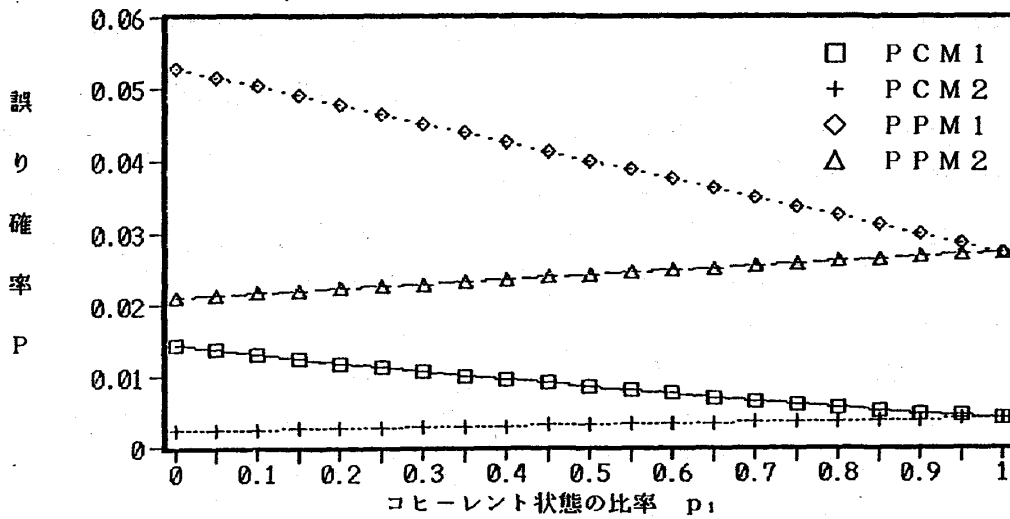


図 9 コヒーレント状態の比率と誤り確率の最適値の関係
($E_{c0} : E_{sq} = 2 : 1$, 誤り訂正能力 $t_0 = 1$)

$\Delta\theta_1 : \Delta\theta_2$	1:4	1:16
PCM-	$P_1 = 0, P_2 = 1$ $\min P = 0.0287$	$P_1 = 0, P_2 = 1$ $\min P = 0.0094$
PCM+	$P_1 = 0, P_2 = 1$ $\min P = 0.0010$	$P_1 = 0, P_2 = 1$ $\min P = 0.0001$
PPM	$P_1 = 0, P_2 = 1$ $\min P = 0.0136$	$P_1 = 0, P_2 = 1$ $\min P = 0.0043$

表 2 $E_{c0} : E_{sq} = 1 : 1$ のときの最適化の結果

4. 2 考察

ここでは、先の最適化した結果をまとめる。

(1) 入力状態 F における光子数確定状態の重ね合わせの最適化

(i) 誤り確率はいずれも

$$PCM+ < PPM < PCM-$$

の関係が成り立っている。また、制約エネルギー C が大きくなるに従って、それらの値の差は小さくなる (図 2)。

(ii) 光子数の分布 $\{p_i\}$ は、制約エネルギー C がある値 C_0 より小さいとき、分布 $\{p_i\}$ はある i で $p_i = 1.0$ となる一点分布になる。そして、 C が C_0 より大きくなると、なめらかな分布になる。この C_0 の値はそれぞれの設定によってまちまちである。このことは、制約エネルギーが小さいとき、純粋状態が理想的であるということを示している (図 3-5)。

(2) 入力状態 F におけるコヒーレント状態とスクイズド状態の比較

(i) $E_{c_0} : E_{s_0} = 1:2$ の時、 p_1 (コヒーレント状態の比率) が大きくなるに従っていずれも誤り確率が大きくなる。これは、 p_1 が大きくなると重ね合わせ全体の平均光子数が小さくなるからと思われる (図 6,7)。

(ii) $E_{c_0} : E_{s_0} = 2:1$ の時、 p_1 (コヒーレント状態の比率) が大きくなるに従って、PCM1, PPM1 は誤り確率が小さくなり、PCM2, PPM2 は誤り確率が大きくなっている。これは、 $\Delta\theta_1 : \Delta\theta_2$ が 1:16 のときは 1:4 のときよりもスクイズド状態の在り方が鋭く出てくるから、平均光子数が大きくなることに対してスクイズド状態の存在が打ち勝って、誤り確率を大きくしていると思われる。このことは、スクイズド状態を通信に使うことの有効性を示唆しているようである (図 8,9)。

(iii) 誤り確率は PCM の誤り訂正能力に関して

$$PCM+ < PPM < PCM-$$

の関係が成り立っている (図 6-9)。

(iv) 誤り確率はスクイズド状態の分散比に関して

$$PCM1 > PCM2$$

$$PPM1 > PPM2$$

の関係が成り立っている。これは、スクイーピングするほど効率が良くなることを示している (図 6-9)。

(v) $E_{c_0} : E_{s_0} = 1:1$ の時, 全ての場合

$$p_1 \text{ (コヒーレント状態の比率)} = 0$$

$$p_2 \text{ (スクイズド状態の比率)} = 1$$

となった。これは、コヒーレント状態よりもスクイズド状態を入力状態に用いたときの方が効率がよいことを示している (表 2)。

§ 5. おわりに

前論文^[6]の延長として、本論文においては、エネルギーによる種々の制約の下で、誤り確率を最適化した。すなわち、平均エネルギーに制約を与え、入力状態として光子数確定状態の重ね合わせおよびコヒーレント状態とスクイズド状態の重ね合わせを用いたときのそれぞれの誤り確率を計算し、その重ね合わせの仕方の比較を行った。とくに、いずれの場合においても、PCM と PPM の効率の比較を行った。その結果、本論文で用いた数理モデルにおいてその誤り確率の限界値を得ることができた。今後、この方法でデジタル変調に関する通信効率を考えることなど様々な応用が考えられる^[11, 12]。

参考文献

- [1] A. N. Kolmogorov : "On the Shannon theory of information transmission in the case of continuous signals", IEEE Trans. Inf. Theory, IT-2, pp. 102 (1956).
- [2] 梅垣 大矢 : "量子論的エントロピー", 共立出版 (1984).
- [3] C. W. Helstrom : "Quantum Detection and Estimation Theory", Academic Press (1965).
- [4] 広田 : "光通信理論", 森北出版 (1985).
- [5] M. Ohya : "Some Aspects of Quantum Information Theory and Their Applications to Irreversible Processes", Rep. on Math. Phys., 27, pp. 19-47 (1989).
- [6] 大矢 吉見 広田 : "量子制御通信過程における誤り確率の厳密な導出", 電子情報通信学会論文誌 B, J71-B, 4, pp. 533-539 (1988).
- [7] 今野 山下 : "非線形計画法", 日科技連 (1978).
- [8] M. Ohya : "On compound state and mutual information in quantum information theory", IEEE Trans. Inf. Theory, IT-29, pp. 770-774 (1983).
- [9] 大矢 須鎗 : "量子制御通信過程における誤り確率の最適化", 電子情報通信学会論文誌 B I, J73-B-I, 4, pp. 200-207 (1990).
- [10] H. P. Yuen : "Two-photon coherent states of the radiation field", Phys. Rev., A13, pp. 2226-2243 (1976).
- [11] "光通信理論とその応用", 森北出版 (1988).
- [12] 島田 禎晉 : "コヒーレント光通信", コロナ社 (1988).