状態の複雑さに関する解析学的研究

湘南工科大学　工学部　情報工学科

明石　重男

§1．序論

1963年にKolmogorovにより導入されたε-エントロピーの概念は，今日，確率論を基盤とする情報理論の分野に於いて，確率変数及び確率過程等の有する情報理論的複雑さに対する定量的尺度を与えるものとして有効な道具となっている(cf.［2］).

一方，光通信技術の進歩に伴い，その数学的基礎を与える事を目的として発展を遂げてきた量子確率論及び量子情報理論に於いても状態の複雑さに関する取り扱い方が問題となっている．1989年Ohyaは，量子情報理論の領域へε-エントロピーの概念を導入する事により，量子論的ε-エントロピー，量子論的フラクタル次元の概念を提唱し，量子状態のエントロピー理論的分類の研究等を行った．

今日，現代計算機科学の急速な進歩は，カオス力学系のグラフィクス表示を可能にし，自然科学で取り扱われる多くの力学系が非常に複雑な軌道を有する事を再認識させる事となったのである．その結果，力学系の描く非常に複雑な軌道に対する数学的評価を与えるべく，微分方程式論，位相力学，函数解析学等の分野からの活発な研究が進められている．

本稿では，状態の複雑さを表現する手法として有効な量子論的ε-entropy及びカオス力学系に対して解析学的手法を適用する事を試みる．§2に於いては，量子論的ε-エントロピーの漸近的挙動を密度作用素の固有値列を用いて記述する事を目的とする．§3に於いては，信号解析に於いて有効なメッセージ空間へのカオス力学系の埋め込みについて説明する．

§2．密度作用素の固有値列と量子論的ε－エントロピーとの関係

$\mathcal{H}$をHilbert空間，ρを$\mathcal{H}$上の密度作用素とする．この時，ρに対してスペクトル分解定理を適用すると，Schatten形式を用いて，

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes \overline{x_n}$$

と表現する事ができる．ここで$\{\lambda_n\}$は$\lambda_n \downarrow 0$を満たすρの固有値列であり，$\{x_n\}$は$\rho x_n = \lambda_n x_n$, $\| x_n \| = 1$を満たすρの固有ベクトル列である．今，$\{\lambda_n\}$を用いて，

$$D(\rho) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(1/\lambda_n)},$$

$$d(\rho) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(1/\lambda_n)}$$

で定義される量をそれぞれ$\{\lambda_n\}$の上からの収束指数，下からの収束指数と呼ぶ．両者の間には$0 \leq d(\rho) \leq D(\rho) \leq 1$という関係が成立する．更に，上からの収束指数に関しては，固有値列との間に次の関係式が成り立つ事が知られている(cf.［3］)：

命題1.
$$D(\rho) = \inf\{ r > 0 \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^r < \infty \}.$$

$T(\mathcal{H})$をHilbert空間$\mathcal{H}$上のトレースクラス作用素の全体，$T(\mathcal{H})_{+,1}$を$\mathcal{H}$上の密度作用素の全体とする．この時，任意の密度作用素ρ及びσに対して，

$$S(\rho|\sigma) = \begin{cases} tr[\rho(\log\rho - \log\sigma)], & s(\rho) \leqq s(\sigma), \\ \infty, & \text{その他.} \end{cases}$$

として定義される量を相対エントロピーという．ここで，$s(\rho)$，$s(\sigma)$はρ及びσの台を表す．

今，$\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$をHilbert空間，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$を，$\mathcal{H}_1$と$\mathcal{H}_2$から構成されるテンソル積Hilbert空間とし，更に$T(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_{+,1}$から$T(\mathcal{H}_1)_{+,1}$及び$T(\mathcal{H}_2)_{+,1}$への部分トレースをそれぞれ tr_1，tr_2 で表す．以下では，$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$が成立する場合を取り扱う．この時，任意の$\rho_1, \rho_2$に対して，

$$I(\rho_1 ; \rho_2) = \sup\{S(\rho_{12}|\rho_1 \otimes \rho_2) ; \rho_{12} \in T(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_{+,1}, \ tr_1\rho_{12} = \rho_1, \ tr_2\rho_{12} = \rho_1\}$$

として定義される量を擬似相互エントロピーという(cf. [6])．今，$\|\cdot\|$を$T(\mathcal{H})$上のトレース・ノルムとした時，任意の正数ε及び密度作用素ρに対して，

$$S(\rho, \varepsilon) = \inf\{I(\rho, \sigma) ; \sigma \in T(\mathcal{H})_{+,1}, \ \|\rho - \sigma\| \leqq \varepsilon\}$$

として定義される量をOhyaの量子論的εーエントロピーという(cf. [6])．

εーエントロピーはεに関する単調非増加函数であるため，εが十分0に近づいた時の$S(\rho, 0)$への収束状況が問題とされる場合が多い．以上の定義及び記法の基に，量子論的εエントロピーの漸近的挙動に対する下からの評価は以下の如く与えられる：

命題2．$S(\rho) < \infty$，$0 < d(\rho)$，$D(\rho) < 1$を仮定した場合，

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log[S(\rho, 0) - S(\rho, \varepsilon)]}{\log(1/\varepsilon)} \geqq -\frac{(1/d(\rho)) - 1}{(1/D(\rho)) - 1},$$

が成立する．

略証．ρのvon NeumannエントロピーをS(ρ)とすると，量子論的εーエントロピーに関して次式が成り立つ：

$$S(\rho, \varepsilon) \uparrow S(\rho, 0) = 2S(\rho), \qquad \varepsilon \downarrow 0.$$

ここで，ρの固有値列$\{\lambda_n\}$及びεを用いて，

$$m(\varepsilon) = \min\{n ; \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \leqq \infty\}$$

を定義し，更に，有限次元の作用素ρ_εを

$$\rho_\varepsilon = [\lambda_1 + \sum_{n=m(\varepsilon)+1}^{\infty} \lambda_n] x_1 \otimes \overline{x}_1 + [\sum_{n=2}^{m(\varepsilon)} \lambda_n] x_n \otimes \overline{x}_n$$

で定義する．この時，ρとρ_εとの間には，

$$\|\rho - \rho_\varepsilon\| \leqq 2\varepsilon$$

という関係が成り立つ．この式より，

$$S(\rho, 2\varepsilon) \leqq I(\rho, \rho_{\varepsilon}) \leqq S(\rho) + S(\rho_{\varepsilon})$$

の成立が示され，結局，

$$S(\rho, 0) - S(\rho, 2\varepsilon) \geqq S(\rho) - S(\rho_{\varepsilon})$$

を得る．求める結果は，上記不等式に，収束指数の定義式を組み合わせる事により示される．

§3．カオス力学系のメッセージ空間への埋め込み

Xをコンパクト距離空間，dをX上の位相を定める距離とする．XからXへの位相写像Tが以下の3条件を満たす場合，Tは(X, d)に関して拡大的カオス写像であるという(cf. [1])：

（1）．Tは推移的である．即ち，任意の開集合G_1及びG_2に対して，

$$T^k G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$$

を満たす整数kが存在する．

（2）．Tは拡大的である．即ち，ある正数εが存在して，任意のx，$y \in X$に対して，

$$d(T^k x, T^k y) > \varepsilon$$

を成立させる整数kが存在する．

（3）．Tに関する周期点の全体はXの内部で稠密である．

Zを整数の集合とする．$\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ を有限集合とし，集合$\mathcal{A}$に離散位相を与える事によりコンパクトHausdorff空間を構成する．この時，この空間を用いて構成される可算無限直積位相空間をメッセージ空間と言い，$\mathcal{A}^Z$で表す．更に$\mathcal{A}^Z$から$\mathcal{A}^Z$への写像Sが

$$S(\Pi_{k \in Z} x_k) = \Pi_{k \in Z} y_k, \qquad 但し，x_{k+1} = y_k,$$

で定義される時，Sを推移変換と言う．以上の定義及び記法の基に次の命題が成り立つ：

命題3．XをCantor集合（完全不連結，コンパクトかつ距離づけ可能な位相空間）とし，dをX上の位相を与える距離とする．XからXへの位相写像Tが(X, d)に関して拡大的カオス写像となるならば，あるメッセージ空間$\mathcal{A}^Z$及びその上で定義された推移変換Sが存在して，(X, d, T)を($\mathcal{A}^Z$, S)の中へ埋め込む事が可能である．

略証．$\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$を直径が$\varepsilon$以下で開かつ閉なXの有限分割とする．この集合に離散位相を導入する事により，$\mathcal{A}$は位相空間となる．そこで可算無限直積位相空間$\mathcal{A}^Z$を構成する．次にXから$\mathcal{A}^Z$への埋め込みを定める．Xから$\mathcal{A}$への写像ϕを

$$\phi(x) = A_i, \qquad 但し，x \in A_i,$$

と定め，ϕを用いてXから$\mathcal{A}^Z$への写像Φを

$$\Phi(x) = \Pi_{k \in Z} \phi(T^k x) = (\cdots, \phi(T^{-1}x), \phi(x), \phi(Tx), \cdots)$$

で定義する．以上の設定の基にΦが(X, d, T)から$(\mathcal{A}^2, S)$への埋め込みになっている事を示す．ΦのXによる像ranΦに$\mathcal{A}^2$からの相対位相を導入して得られる位相空間がXと位相同型になっている事，更に$\Phi(Tx) = S(\Phi(x))$が全てのXの要素xに対して成立している事を示せばよい．後半はΦの定義より明らか故，前半のみを示す．ΦがXからranΦへの全写である事は明らか．$\mathcal{A}$の要素の直径は全てε以下であるため，$x \neq y$ならば$\phi(T^k x) \neq \phi(T^k y)$を満たす整数kが存在する．従って$\Phi$は単写でもある．$\phi$の連続性より$\Phi$の連続性が示せる．結局，$\Phi$はコンパクトHausdorff空間XからコンパクHausdorff空間ranΦへの連続写像であるから位相写像でもある．故に命題成立．

1958年，NakamuraとTakedaは代数学的接合積の理論をvon Neumann代数の理論へ応用する事により，離散的エルゴード変換群とそこから生成されるvon Neumann代数との関連性について研究を行った(cf.[4])．この方法を用い，カオス力学系を埋め込んだメッセージ空間からvon Neumann代数を構成する事により，カオス力学系に作用素代数論を応用する事，更に，von Neumannエントロピー及びその拡張形を与えるOhyaの$\mathcal{S}$-エントロピー(cf.[5])等の量子論的エントロピー理論を適用する事が可能となる．

参 考 文 献

[1]. R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1987.

[2]. A. N. Kolmogorov, Theory of transmission of information, Amer. Math. Soc. Translation, Ser.2, 33(1963), 291-321.

[3]. B. Ja. Levin, Distribution of zeros of entire functions, Amer. Math. Soc. Monogr. Translation, Providence, vol.5(1964).

[4]. M. Nakamura and Z. Takeda, On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 34(1958), 489-494.

[5]. M. Ohya, Entropy transmisson C^*-dynamical systems, J Math. Anal. Appl., 100(1984), 222-235.

[6]. M. Ohya, Some aspects of quantum information theory and their application to irreversible processes, Rep. Math. Phys., 27(1989), 19-47.