1／fゆらぎ について

東工大理　寺田雅彦

1．1／f ゆらぎとは

フーリエ周波数fに反比例するパワースペクトル密度をもつゆらぎを、「1／fゆらぎ」という。この1／fスペクトルは、電気抵抗体に直流電流を流しながらその両端に現れる電圧ゆらぎを測定し、そのパワースペクトル密度を求めたとき、低周波部分に現れる（図1）。この部分のスペクトルレベルは、Iの2乗に比例しているので、電圧ゆらぎの原因が抵抗の値Rのゆらぎであることがわかる。図1の高周波部分は熱雑音である。

2．1／fゆらぎの特徴

1／fゆらぎの特色は、特徴的な時間スケールτが存在しないことである。このため、$f \to 0$の極限でスペクトル$S(f)$は発散し、$S(f)$の周波数についての積分も発散する。

（例）特徴的な時間τが存在する場合

電圧ゆらぎを$\delta v(t)$とすると、τがあるときには、自己相関関数は概ね

$$\langle \delta v(t)\, \delta v(t') \rangle \propto \exp(-t/\tau)$$

となる。Wiener－Khinchinの定理により、パワースペクトルは、図2のようなローレンツ型のスペクトル

$$S(f) \propto \tau / \{1 + (2\pi f \tau)^2\}$$

となり、$f \to 0$では$S(f)$は定数となる。また、$S(f)$の周波数fについての積分は、有限の値に収束する。

3．アランバリアンス

測定されたゆらぎが1／fゆらぎかどうかを判断する場合に、アランバリアンスσ_a^2という量を用いることができる。ゆらいでいる量$x(t)$の時間区間$[t_n,\ t_n+\tau]$での時間平均を

$$y_n = 1/\tau \int_{t_n}^{t_n+\tau} dt\, x(t)$$

とする。ここで、隣接する平均値の分散がアランバリアンスとして定義される。

$$\sigma_a^2 = 1/2 \cdot \langle (y_n - y_{n+1})^2 \rangle$$

σ_a^2は、$x(t)$が1／fゆらぎをしているときにのみ、τによらず一定となる。このこともまた、1／fゆらぎが特定の時間スケールを持たないことを表している。

4. Hoogeの経験則

1／fに関する測定データは膨大な量であるが、Hoogeはこれらのデータを整理して、次のような関係を見いだした。電圧V、電流I、抵抗Rのゆらぎのパワースペクトル密度を、それぞれSV(f)，SI(f)，SR(f)とすると、

$$SV(f)/V^2 = SI(f)/I^2 = SR(f)/R^2 = \alpha/Nf$$

が多くのデータで成り立っている。ここで、Nは、試料の中に含まれる自由電荷の総数、αは、0．002にほぼ等しい定数である。

5. McWhorterのモデル

緩和時間τを持った過程x(t)の自己相関関数C(t; τ)は、

$$C(t;\tau) = \langle x^2 \rangle \exp(-t/\tau)$$

となるから、Wiener－Khinchinの定理によってパワースペクトル密度は、

$$S(f;\tau) = \int C(t;\tau)\exp(2\pi i f t)\,dt = 2\tau\langle x^2\rangle/\{1+(2\pi f\tau)^2\}$$

となる。更に、この緩和時間τが分布しており、$a\delta\tau/\tau$に等しいと仮定すると、上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(f;\tau)(a/\tau)\,d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2a\langle x^2\rangle/\{1+(2\pi f\tau)^2\}\,d\tau \\ &= (a\langle x^2\rangle/\pi f)\{\tan^{-1}(2\pi f\tau_2) - \tan^{-1}(2\pi f\tau_1)\} \end{aligned}$$

ここで、τ_1, τ_2は緩和時間の下限と上限である。したがって、

$$1/\tau_2 \ll f \ll 1/\tau_1$$

という周波数領域では、上式は次のように近似される。

$$S(f) = a\langle x^2\rangle/2f$$

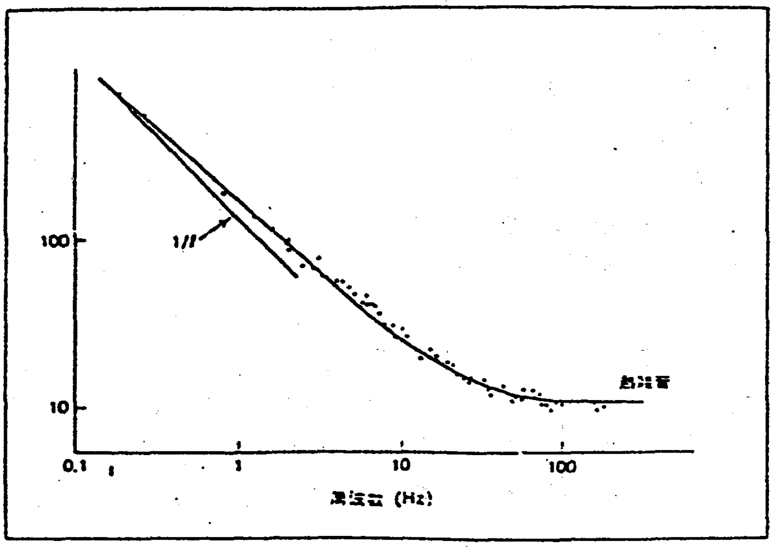
6. 他のシンプルなモデル

Geiselらの2次元周期ポテンシャル中の粒子の運動のモデルについては、Ref. 6、Bakらのモデルについては、Ref. 7を参照して下さい。

Reference

1. F. N. Hooge, T. G. M. Kleinpenning and L. K. J. Vandamme : Rep. Prog. Phys. 44 (1981) 31p.
2. P. Dutta and P. M. Horn : Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 497p.

3. M. B. Weissman: Rev. Mod. Phys. 60 (1988) 537p.
4. 武者利光：第33回物性若手夏の学校テキスト (1988) 181p.
5. 武者利光、北原和夫：応用物理 58 (1989) 1688p.
6. T. Geisel, A. Zacherl, and G. Radons: Z. Phys. B71 (1988) 117p.
7. Per. Bak, Chao. Tang, and Kurt. Wiesenfeld: Phys. Rev. A38 (1988) 364p.



《図1》 抵抗体に直流電流を流したときに、その両端に現れる電圧ゆらぎのスペクトル
低い周波数に現れる1/fスペクトルは抵抗の値のゆらぎによるものであるが、高い周波数に現れるスペクトルは熱雑音そのものである。

《図2》 ローレンツ型のスペクトル
緩和周波数f_0よりも小さい周波数ではスペクトルは周波数にかかわらず一定の値をとるが、それよりも大きい周波数ではスペクトルの値は周波数の2乗に逆比例して減少する。