21. 外部拘束条件がある系のDiracの方法による量子化

本間高弘

一般の曲がった空間での粒子の座標、速度、運動量をそれぞれ$x_i, \dot{x}_i, p_i$とし、Lagrangian LのHessianを$W_{ij}=\partial^2 L/\partial \dot{x}_i \partial x_j$で定義する。一般にHessianが正則でない場合に、$(x, \dot{x})$から(x, p)へ変換すると、x, p間の関係式、つまり拘束条件が得られる。このような拘束のある系についての正準量子化はDiracによって定式化された。

Diracの手法は、上記のようなLagrangianに固有な拘束の存在する系のみならず、外部からholonomicな拘束$f(x)=\mathrm{const.}$（x:一般化座標）が課された系に対しても適用できる。我々はDiracの手法を用いて、$f(x)=\mathrm{const.}$の拘束が存在する系を量子化し、正準変数の交換子が、拘束がない通常の系と違って、Kronecker's deltasでは表わされないことを示す。

次に$\dot{f}(x)=0$（x:一般化座標）という拘束（時間tで積分すれば$f(x)=\mathrm{const.}$と同等である）が課された系に対して、同様にDiracの手法を使って量子化を行なう。そして座標x_iとその共役運動量π_iの交換子が$i\hbar\delta_{ij}$になることを示す。また量子化の際に拘束、交換子及びHamiltonianが、座標と運動量の積になるため、演算子の順序をどの様にとるかが問題になる。この順序をどう決めれば、$f(x)=\mathrm{const.}$の拘束が存在する系と$\dot{f}(x)=0$の拘束が存在する系が、Hamilton形式においても等価になるか議論する。

最後に、例として粒子が球面上に束縛されている系について検討する。