Hamilton系のエルゴード問題

津田塾大学　丹羽敏雄

近可積分ハミルトン系

$$H\varepsilon(I,\phi)=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\phi)\quad (I,\phi)\in R^d\times T^d \tag{1}$$

の不安定領域，すなわち，KAMトーラスで満たされたKAM領域の補集合に於ける解の振舞いについて，数学的に知られている主な結果の2，3を紹介する。

具体的には

(Ⅰ) Nekhoroshev の定理

(Ⅱ) Arnold 拡散

及び，それらに関連することを述べる。

(Ⅰ) Nekhoroshev の定理

(a) von Zeipel の摂動論

母関数　$I'\phi+S(I',\phi)$ を持つ正準変換　$C\varepsilon(I,\phi)=(I',\phi')$：

$$I=I'+\frac{\partial S}{\partial\phi}(I,\phi)\qquad \phi'=\phi+\frac{\partial S}{\partial I}(I,\phi)$$

によって，ハミルトニアン(1)を，ある与えられた形を持つハミルトニアンに変換する：

$$H\varepsilon(C^{-1}(I',\phi'))=h\varepsilon(I,\phi) \tag{2}$$

ここで

$$h\varepsilon=h(I')+\varepsilon h_1(I',\phi)+\varepsilon^2 h_2(I',\phi)+\cdots$$

$$h_n(I',\phi)=\sum_{\nu\in\pi}h_{n\nu}(I')e^{i\nu\cdot\phi},\quad h(I')=H_0(I')$$

である。πはZ^d のある与えられた集合。

母関数$S_1(I',\phi)$は

$$S=\varepsilon S_1(I',\phi)+\varepsilon^2 S_2(I',\phi)+\cdots$$

で与えられているものとする。

方程式(2)を変数(I,ϕ)に関して解くと，ε^n の項を比較すると

$$\omega(I')\cdot\frac{\partial S_n}{\partial\phi}(I',\phi)+N_n(I',\phi)=\sum_{p=1}^{n-1}\hat{N}_{n-p}(I',\phi)+h_n(I',\phi) \tag{3}$$

を得る。ここで

$$\omega(I')=\frac{\partial H_0}{\partial I}(I'),$$

$N_n(I',\phi)$は$S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$（とH）から定まる関数，

$\hat{N}_{n-p}(I',\phi)$は$S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$とh_{n-p}（とH）から定まる関数である。

とくに，$N_1=H_1(I',\phi)$，$\hat{N}_1=0$

方程式（３）は次の方程式と同値である：

$$\begin{cases} h_n\ (I',\ \phi)=P\pi M_n \\ \omega\,(I')\cdot\dfrac{\partial S_n}{\partial\phi}+(\mathrm{id.}-P\pi)\,M_n=0 \end{cases} \qquad (3)'$$

ただし
$$M_n=N_n-\sum_{p=1}^{n-1}\hat{N}_{n-p}$$

$P\pi$はFourier mode with πへの射影である。

(b) 共鳴帯の構造

以下，あまり本質的でない技術的困難を小さくするために，

$d=3$，$H_0\ (I)=1/2\ I^2$，$D=\{I\in R^d\ ;1/2\ R\leqq|I|\leqq R\}$

とする。したがって，$\omega\,(I)=I$。

定義　$\Sigma\,(\nu):=\{I\in R^d\ ;I\cdot\nu=0\}\quad \nu\in Z^d$

を order νのresonance plane

$$\Sigma\varepsilon\,(\nu):=\{I\in R^d\ ;\frac{|I\cdot\nu|}{\|\nu\|}\leqq\frac{\varepsilon^\sigma}{|\nu|^{d+1}}\}\quad \nu\in Z^d,\ \sigma>0$$

を（大きさが$\varepsilon^\sigma/|\nu|^{d+1}$）のresonance layer

$\Sigma\,(\nu,\ \nu):=\Sigma\,(\nu)\cap\Sigma\,(\nu)$

を double resonance line

$\Sigma\varepsilon\,(\nu,\ \nu):=\Sigma\varepsilon\,(\nu)\cap\Sigma\varepsilon\,(\nu)$

を（大きさが$\varepsilon^\sigma/|\nu|^{d+1}$）の double resonance layer という。

このとき，次の事柄が成立する：

$\nu\neq\mathrm{const}\ \nu'$，　$|\nu|$，$|\nu'|\leqq N\,(\varepsilon)=\varepsilon^{-\gamma}\quad(\gamma>0)$

とすると，ベクトルν，ν'のなす角θは

$$\theta\gtrsim N\,(\varepsilon)^{-2}=\varepsilon^{2\gamma}$$

このことから，double resonance layer $\Sigma\varepsilon\,(\nu,\ \nu')$の直径は $\lesssim\varepsilon^{\sigma-2\gamma}$ であることが分かる。同様に，任意の２つの double resonance line の距離は $\gtrsim\varepsilon^{2\gamma}$ であることも分かる。

(c) Nekhoroshev の定理

$H_0\ (I)$は解析的で，Dにおいて steep，すなわち

（S－１）　Dにおいて，$\omega\,(I)\neq0$

（S－２）　Dの任意の部分線形空間Mに対して，$H_0\ (I)\,|_M$は高々複素孤立特異点を持つ。

を満たすとする。このとき，（１）をハミルトニアンに持つハミルトン方程式の解 $I\,(t)$はεが十分小さいとき

$|t|\leqq\varepsilon^{-1}\exp\,(\varepsilon^{-a})$に対して，$|I\,(t)-I\,(0)|\leqq\varepsilon^b$を満たす。

証明の概略

(i) まず，ハミルトニアン（1）を

$$\tilde{H}\varepsilon(I, \phi) = H_0(I) + \varepsilon \tilde{H}_1(I, \phi)$$

ただし $\tilde{H}_1(I, \phi) = \sum_{|\nu| \leq N(\varepsilon)} H_\nu(I) e^{i\nu\cdot\phi}$ $[H_1 = \sum_{\nu \in Z^d} H_\nu(I) e^{i\nu\cdot\phi}]$

に置き換えても

$$|H_1 - \tilde{H}_1| \leq \mathrm{const} \cdot e^{-\mathrm{const}\cdot N(\varepsilon)}$$

であるので，この置き換えによって，解は，$|t| \sim e^{\mathrm{const}\cdot N(\varepsilon)}$ の間，ε程度のみ相異なるだけである。したがって，以下ハミルトニアンとしては$\tilde{H}\varepsilon(I, \phi)$を考察する。

(ii) $I \in \Sigma\varepsilon(\nu_1, \nu_2) \cap D$ $(|\nu_1|, |\nu_2| \leq N(\varepsilon))$ のとき，

$$\pi = \pi[\nu_1, \nu_2] := \{z_1\nu_1 + z_2\nu_2 ; z_1, z_2 \in Z\}$$

として，von Zeipel の摂動法を適用する。$I \in \Sigma\varepsilon(\nu_1, \nu_2)$ であるので，それは可能である。それによって

$$h_n(I', \phi), \; S_n(I', \phi) \quad 1 \leq n \leq N(\varepsilon)$$

を定める。このとき

$$|C\varepsilon - id.| \sim \varepsilon^{\xi} \quad (\xi > 0)$$

であって，新しいハミルトニアンは

$$h\varepsilon(I', \phi') = h(I') + \sum_{\nu \in \pi, |\nu| \leq N(\varepsilon)} h_{\varepsilon\nu}(I') e^{i\nu\cdot\phi'} + O(\exp(-\varepsilon^{-\xi})) \quad (\xi > 0)$$

の形になる。最後の項を無視すると

$$\frac{d}{dt} I' = -\frac{\partial h\varepsilon}{\partial \phi'} = -\sum_{\nu \in \pi, |\nu| \leq N(\varepsilon)} (i h_{\varepsilon\nu}(I') e^{i\nu\cdot\phi'})\nu \quad \in \pi(\nu_1, \nu_2)$$

ここで，$\pi(\nu_1, \nu_2) := \{r_1\nu_1 + r_2\nu_2 ; r_1, r_2 \in R\}$

よって，I'の動く方向は，ほぼπ一方向である。一方，$\Sigma\varepsilon(\nu_1, \nu_2) \cap D$ のπ方向の大きさ，すなわち，$\Sigma\varepsilon(\nu_1, \nu_2) \cap D$ の直径は $\lesssim \varepsilon^{\sigma - 2\tau}$であったから，$I'$の変動の大きさは$\varepsilon^{\sigma-2\tau}$の程度である。Iは$\Sigma\varepsilon(\nu_1, \nu_2)$を出れば，resonance layer $\Sigma\varepsilon(\nu_1)$，$\Sigma\varepsilon(\nu_2)$のいずれかに入り込むか，"non rezonance zone"，すなわち，order が$N(\varepsilon)$以下のどのresonance layer や double resonance layer にも属さない領域に入り込む。

(iii) $I \in \Sigma\varepsilon(\nu)$ $(|\nu| \leq N(\varepsilon))$ のとき，

(ii)とまったく同様に，$\pi = \pi[\nu] := \{z\nu ; z \in Z\}$

として von Zeipel の摂動法を適用する。$I' \in \Sigma\varepsilon(\nu)$ であるので，それは可能である。(ii)と同様に，I'の動く方向は，ほぼπ一方向である。したがって，やはりI'は$\Sigma\varepsilon(\nu)$を横切る方向に動く。$\Sigma\varepsilon(\nu)$の幅は$\sim\varepsilon^{\sigma}$であったから，I'の変動はやはりε^{σ}の程度である。Iは，$\Sigma\varepsilon(\nu)$を出ると，non rezonance zoneに入り込む。

(iv) I がnon rezonance zone にいる場合，$\pi=\{\phi\}$ として，von Zeipel の摂動法を適用すると，

$$\dot{I}\sim O(\exp(-\varepsilon^{-\varepsilon}))$$

を得る。

(d) 反例

$$H\varepsilon(I,\phi)=1/2\ (I_1^2-I_2^2)+\varepsilon\sin(\phi_1-\phi_2) \qquad (4)$$

とする。このとき，

$$I_1(t)=I_2(t)=-\varepsilon t,\ \phi_1(t)=\phi_2(t)=-1/2\varepsilon t^2$$

は解である。

(Ⅱ) Arnold拡散

Nekhoroshev の定理により，不安定領域における作用変数Iの拡散の速度は極めて小さいことが分かった。定理の仮定のもとで，実際に拡散が生じることはArnold によって示された。次の例がそれである：

$$H(I,\phi)=1/2\ (I_1{}^2+I_2{}^2)+\varepsilon H_1 \qquad (5)$$

$$H_1=(\cos\phi_1-1)(1+\mu B),\ B=\sin\phi_2+\cos t$$

相空間は $X=R^2\times T^3\ni(I_1,I_2,\phi_1,\phi_2,t)$

である。

定理 (Arnold)

$0<A_1<A_2$ とする。$\forall\varepsilon>0$ に対して，μを十分小さくとると，(5) の解 $I(t)$ で

$$I(0)<A_1,\ I(T)>A_2 \qquad (\exists T>0)$$

を満たすものが存在する。

証明の概略を述べよう。

(a) まず $\mu=0$ としよう：

$$H^{(1)}=1/2\ I_1{}^2+\varepsilon(\cos\phi_1-1),\ H^{(2)}=1/2\ I_2{}^2$$

と置こう。$\mu=0$ の場合，系は$H^{(1)}$，$H^{(2)}$ をそれぞれハミルトニアンに持つ系の直積になっているので，ただちに積分可能である。トーラス

$$T_\omega:=\{I_1=0,\ \phi_1=0,\ I_2=\omega\}$$

は系の不変トーラスである。このトーラスは，次の安定多様体$Y_\omega{}^-$と，不安定多様体$Y_\omega{}^+$を持っている (Arnold はこれらを whisker と呼んでいる)：

$$Y_\omega{}^\pm:=\{H^{(1)}=0,\ H^{(2)}=1/2\ \omega^2\}$$

$$=\{I_2=\omega,\ I_1=\pm2\sqrt{\varepsilon}\sin(\phi_1/2)\}$$

これらは，3次元の不変多様体である。

$Y_\omega{}^\pm$は次の (t^0，ϕ_2^0) をパラメータとする，解曲線の2−パラメータ族からなっ

ている：

$$I_1\ (t) = \pm 2\sqrt{\varepsilon}/\cosh\tau,\ I_2\ (t) = \omega$$

$$\phi_1\ (t) = \pm 2\,\mathrm{arccot}\,(-\sinh\tau),\ \phi_2\ (t) = \phi_2^0 + \omega\,(t - t^0) \qquad (6)$$

ただし $\tau = \sqrt{\varepsilon}\,(t - t^0)$

(b) 次に，$\mu \neq 0$ としよう：

$\mu \neq 0$ の場合も，トーラスT_ωは不変なままに保たれている。T_ωの安定多様体Y_ω^-，不安定多様体Y_ω^+はもちろん，摂動される。その方程式を，"座標" $H^{(1)}$，$H^{(2)}$を用いて，

$$H^{(1)} = \Delta_1^\pm\ (\phi_1\ ;\ \phi_2\ ,\ t\ ;\ \omega)$$

$$Y_\omega^\pm\ :\quad H^{(2)} = 1/2\ \omega^2 + \Delta_2^\pm\ (\phi_1\ ;\ \phi_2\ ,\ t\ ;\ \omega)$$

$$\Delta_k^\pm\ (0\ ;\ \phi_2\ ,\ t\ ;\ \omega) = 0,\ \Delta^\pm = O\,(\mu)$$

と表そう。ただし，Y_ω^+の場合は$|\phi_1| < 3/2\ \pi$，Y_ω^-の場合は$|\phi_1 - 2\pi| < 3/2\ \pi$ で考える。

Y_ω^+と$Y_{\overline{\omega}}^-$の交点を，$\phi_1 = \pi$ 上でさがそう。その交点は次の方程式の解である：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_1^+\ (\pi\ ;\ \phi_2\ ,\ t\ ;\ \omega) = \Delta_1^-\ (\pi\ ;\ \phi_2\ ,\ t\ ;\ \overline{\omega})\\ &1/2\ \omega^2 + \Delta_2^+\ (\pi\ ;\ \phi_2\ ,\ t\ ;\ \omega) = 1/2\ \overline{\omega}^2 + \Delta_2^-\ (\pi\ ;\ \phi_2\ ,\ t\ ;\ \overline{\omega})\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

さて，

$$\Delta_k^\pm\ (\pi\ ;\ \phi_2^0\ ,\ t^0\ ;\ \omega) = \int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)}\ dt$$

である。ただし，積分は解曲線に沿って行う。なぜなら，$t \to \mp\infty$ のとき，解は，トーラスT_ωにそれぞれ収束し，T_ω上では，$H^{(1)} = 0$，$H^{(2)} = 1/2\ \omega^2$ であるからである。

$$\int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)}\ dt = \int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)}\ dt + O\,(\mu^2)$$

である。ただし，右辺の積分は，$\mu = 0$ のときの解，すなわち，曲線（6）に沿って積分する。

$$\mu\,\delta_k^\pm\ (\pi\ ;\ \phi_2^0\ ,\ t^0\ ;\ \omega) = \int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)}\ dt \quad \text{（積分は（6）に沿って）}$$

と置こう。

$$\mu\,\delta_k^\pm\ (\pi\ ;\ \phi_2^0\ ,\ t^0\ ;\ \omega) = \int_{\mp\infty}^{0} \{H,\ H^{(k)}\}\ d\,(t - t^0)$$

（積分は（6）に沿って）

さて，

$$\delta_k^\pm\ (\pi\ ;\ \phi_2^0\ ,\ t^0\ ;\ \omega) - \delta_k^\pm\ (\pi\ ;\ \phi_2^0\ ,\ t^0\ ;\ \overline{\omega}) \sim \varepsilon\,(\omega - \overline{\omega})$$

であることが，以下と同様の計算により分かる。したがって，方程式（7）は次の方程式と同値になる：

$$\begin{aligned}\delta_1 &= O(\omega-\overline{\omega})+O(\mu)\\ \mu\delta_2 &= \mu O(\omega-\overline{\omega})+O(\mu^2)+1/2\ (\omega^2-\overline{\omega}^2)\end{aligned} \tag{8}$$

ただし

$$\delta_k := \delta_k^-(\pi;\phi_2^0,\ t^0;\omega)-\delta_k^+(\pi;\phi_2^0,\ t^0;\omega)$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\{H,\ H^{(k)}\}\,d(t-t^0)\quad (積分は(6)に沿って)$$

さて，

$$\{H,\ H^{(2)}\}=\mu\varepsilon I_2\ (1-\cos\phi_1)\cdot\frac{\partial B}{\partial\phi_2}$$

であるから，これに（６）を代入して計算を実行すると

$$\delta_2 = 2\pi\omega^2\frac{\cos\phi_2{}^0}{\sinh(\pi\omega/2\sqrt{\varepsilon})}$$

同様に，$\{H,\ H^{(1)}\}=\mu\varepsilon I_1\ \sin\phi_1\cdot B$

であるから，これに（６）を代入して計算を実行すると

$$\delta_1 = 2\pi\frac{\sin t^0}{\sinh(\pi/2\sqrt{\varepsilon})}-\delta_2$$

を得る。したがって，方程式（８）は

$$\delta_2 = O(\mu)+\frac{O(\omega-\overline{\omega})}{\mu}=2\pi\omega^2\frac{\cos\phi_2{}^0}{\sinh(\pi\omega/2\sqrt{\varepsilon})}\quad\sim e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\delta_1+\delta_2 = O(\mu)+\frac{O(\omega-\overline{\omega})}{\mu}=2\pi\frac{\sin t^0}{\sinh(\pi/2\sqrt{\varepsilon})}\quad\sim e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$$

と同値である。よって

$$\omega-\overline{\omega}=O(\mu^2),\ \mu=O(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}) \tag{9}$$

とすると，この方程式を$\phi_2{}^0$とt^0に関して解くことができる。

こうして，ω，$\overline{\omega}$が条件（９）を満たすとき，トーラスT_ωの不安定多様体（whisker ）$Y_\omega{}^+$と$T_{\overline{\omega}}$の安定多様体（whisker ）$Y_{\overline{\omega}}{}^-$は互いに交わることが分かった。

トーラスの族　T_{ω_k}（k＝１，２，…，Ｎ）は，$\omega_k-\omega_{k+1}=O(\mu^2)$のとき，Arnoldのいわゆる推移鎖（transition chain）をなす。これによって，トーラス　T_{ω_1}の任意の近傍に点がとれて，その点は，トーラスの族　T_{ω_k}（k＝１，２，…，Ｎ）の安定多様体$Y_{\omega_k}{}^-$，不安定多様体$Y_{\omega_k}{}^+$の近くに沿って，次々と（非常にゆっくりとした速度で）移動することができ，最後のトーラス　T_{ω_N}の近傍に到達することができる。詳しくは，文献（２）を見られたい。

最後に次の注意をしておこう。トーラスの族　T_{ω_k}（k＝１，２，…，Ｎ）は，$\omega_k-\omega_{k+1}=O(\mu^2)$を満たしさえすれば何でもよいことに注意しよう。したがって，（５）の解はI_2軸に沿って，I_2方向にどの様な運動も実際に可能である。

文献

（１）V.I.Arnold：Dynamical system III, Springer（1988）

（２）　　　　　：Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Sov.Math.Dokl.5(3)（1964）, pp581-585

（３）G.Gallavotti：Quasi-integrable mechanical systems , Les Houches , Session XLIII（1984）, pp542-624

（４）A.Lichtenberg-M.Liebermann：Regular and stochastic motion , Springer（1983）

（５）J.Moser：Recent development in the theory of Hamiltoian systems, SIAM Review, 28（1986）, pp459-485

（６）N.Nekhoroshev：An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, Russian Math.Surv.32.6（1977）pp1-65

（７）T.Niwa：力学系，紀伊国屋書店（1981）

（８）　　　：近可積分 Hamilton 系のエルゴード問題，数学（1988）pp69-77

＊詳しい文献表に関しては，上の（１）または（８）の文献表を見て下さい。