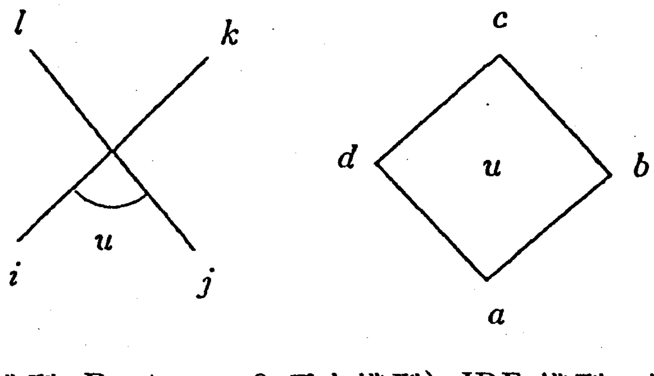
統計力学における可解格子模型

阪大理　　阿久津 泰弘

1　vertex 模型と IRF 模型

以下では格子とは正方格子を指すものとする．また,「可解」とは (最低限) 1 格子点あたりの自由エネルギー $f = -k_{\rm B}T\lim_{N\to\infty}\log Z_N$ が厳密に計算可能であることとする．2 次元統計力学格子模型 (可解・非可解) には大きくわけて vertex (頂点) 模型と IRF(Interaction Round a Face: Baxter の命名による) 模型の 2 種類がある.[1] 頂点模型は格子のボンドの上に, IRF 模型では格子点上に「スピン変数」がのっている．各局所的スピン配置に応じて統計重率 (ボルツマン重率) が定義されている．一般には任意のスピン配置が許されるものではなく, 頂点模型の場合は各格子点のまわりのスピン配置について, また, IRF 模型の場合は各基本面の 4 頂点のスピン配置について拘束条件およびボルツマン重率が与えられる．頂点模型の例としては, 誘電体模型

$S^{ik}_{jl}(u)$  $w(abcd;u)$

(Lieb-Wu の 6 頂点模型, Baxter の 8 頂点模型), IRF 模型の例としては Ising 模型, Hard-hexagon 模型などがある．頂点模型と IRF 模型はある意味で互いに dual な関係にあるが, 直接に'dual 変換' が存在する場合と, もう少し間接的な関係で対応する場合とがある．

2　Yang-Baxter 関係式

単に模型を定義しただけでは解けない．鍵となる考え方は

[1] 単独の模型を扱うのではなく「模型の族」を考える．つまりボルツマン重率をある変数 (スペクトラルパラメタ- と呼ばれる) によってパラメトライズする．

[1]最近では IRF 模型のかわりに面模型という言い方もある．ここでは Baxter の命名を尊重する．

[2] その族に属する各模型に付随した転送行列 $T(u)$ が互いに交換するようにする:

$$[T(u), T(v)] = 0 \quad \forall u, v \tag{1}$$

言い換えれば,「互いに交換する転送行列の族」を構成する.

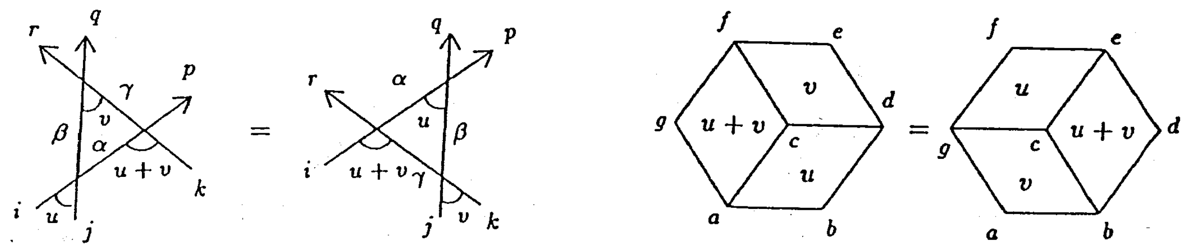
上記 [1], [2] のための十分条件が Yang-Baxter 関係式 (以下 YBR と略記) である (Yang-Baxter 方程式と呼ばれることも多い). 頂点模型の場合, YBR は次のようになる:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} S^{i\alpha}_{j\beta}(u) S^{\alpha p}_{k\gamma}(u+v) S^{\beta q}_{\gamma r}(v) = \sum_{\alpha\beta\gamma} S^{j\beta}_{k\gamma}(v) S^{i\alpha}_{\gamma r}(u+v) S^{\alpha p}_{\beta q}(u). \tag{2a}$$

IRF 模型の場合は

$$\begin{aligned} &\sum_c w(bdca; u) w(acfg; u+v) w(cdea; v) \\ &= \sum_c w(abcg; v) w(bdec; u+v) w(cefg; u) \end{aligned} \tag{2b}$$

とかける. IRF 模型の場合の関係式は star-triangle 関係式と呼ばれることも多い. [2] この交換する転送行列の族 $\{T(u)\}$ を出発点にして種々の問題を統一的に取り扱う (



解く) 方法が量子逆散乱法 (Quantum Inverse Scattering Method: QISM) である.

Zamolodchikov が指摘したように, 頂点模型のボルツマン重率は 1+1 次元多体量子系における因子化 (factorized)S 行列の行列要素と見なすことができる. このとき YBR は S 行列の因子化条件式となっている. いま rapidity u をもつ粒子 i の'内部状態空間' を $V_i(u)$ とし, S 行列 operator $R_{ij}(u,v) : V_i(u) \otimes V_j(v) \to V_j(v) \otimes V_i(u)$ を導入すると YBR はつぎのようにかける:

$$R_{23}(v) R_{13}(u+v) R_{12}(u) = R_{12}(u) R_{13}(u+v) R_{23}(v) \tag{3}$$

ただしここでは $R_{ij}(u,v) = R_{ij}(u-v)$ となる'通常の場合' を想定している. $R_{ij}(u)$ がある小さな parameter($\hbar$ とかくことにする) による展開

$$R_{ij}(u) = I + \hbar \cdot r_{ij}(u) + O(\hbar^2) \tag{4}$$

[2] もともと Baxter はこの関係式を generalized star-triangle relation と呼んだ. これはこの関係式が Ising 模型で古くから知られていた「元祖」 star-triagle relation の拡張になっているからである.

をもつと仮定したとき，$r_{ij}(u)$ の満たす関係式

$$[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{12}(u), r_{23}(v)] + [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] \tag{5}$$

を古典 (classical) YBR とよぶ．この命名に呼応して最近は本来の関係式 (3) のことを量子 (quantum) YBR と呼ぶことも多い．この古典 YBR は古典完全積分系の議論に用いられている．以下では単に YBR という場合には量子 YBR のことを指しているものとする．

3　組み紐群との関係

正方格子を斜め方向 (45° 方向) からながめることにし，この方向での転送行列 $T^{\times}(u)$ (diaginal-to-diagonal transfer matrix) を考える．$T^{\times}(u)$ は 'local な' 転送行列 $X_i(u)$ (subscript i は horizontal position) を用いて

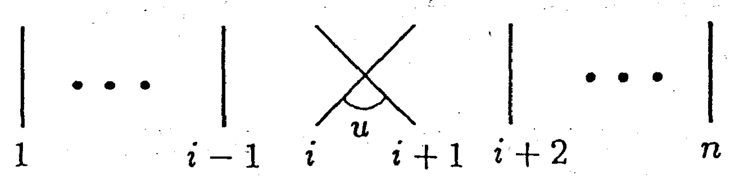
$$T^{\times}(u) = T^{\text{even}}(u) T^{\text{odd}}(u), \tag{6a}$$

$$T^{\text{even}}(u) = X_{2m}(u) X_{2n-3}(u) \cdots X_2(u), \tag{6b}$$

$$T^{\text{odd}}(u) = X_{2m-1}(u) X_{2n-3}(u) \cdots X_1(u) \tag{6c}$$

と表される (横方向の格子サイズを $n = 2m$ とした)．$\{X_i(u)\}$ を用いると YBR は

$X_i(u)$



$$X_i(v) X_{i+1}(u+v) X_i(u) = X_{i+1}(u) X_i(u+v) X_{i+1}(v) \quad (1 \le i \le n-1) \tag{7a}$$

と表現される．これと，自明な関係式

$$X_i(u) X_j(v) = X_j(v) X_i(u) \quad (|i-j| \ge 2) \tag{7b}$$

を合せると，次の n 本紐に対する組み紐群 B_n の定義関係式との類似は明らかであろう:

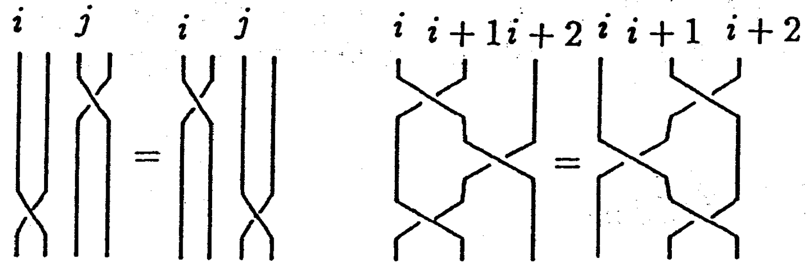
$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad (i = 1, \ldots, n+1) \tag{8a}$$

$$b_i b_j = b_j b_i \quad (|i-j| \ge 2) \tag{8b}$$

ここで 作用素 b_i は i 番目の紐と $i+1$ 番目の紐とを組む操作に対応している．(7) 式の u, v を消去できれば (8) 式が得られるのだが，これには正弦関数/ 双曲線関数で parametrize される「臨界的な」模型を選んで $u, v \to \infty$ とすればよいことがわかっている．つまり公式

$$b_i = \lim_{u \to \infty} X_i(u) \tag{9}$$

によって，臨界可解模型から組み紐群の表現がえられる．この公式から出発して結び目・絡み目の位相不変量を構成する一般論が確立されている．



4 1次元量子系との関連

交換する転送行列の族 $\{T(u)\}$ が存在すると, 直ちに, 微分係数 $(n \geq 0)$

$$I_n = \left. \frac{\mathrm{d}^n \log T(u)}{\mathrm{d}u^n} \right|_{u=0} \tag{10}$$

が involutive な無限個の保存量を構成することが導かれる:

$$[I_n, I_m] \quad \forall n, m. \tag{11}$$

特に 2 次元可解格子模型の場合には $-I_1$ が 1 次元量子スピン系の Hamiltonian をあたえている (Baxter の公式):

$$\begin{aligned} H &= -\left. \frac{\mathrm{d} \log T(u)}{\mathrm{d}u} \right|_{u=0} \\ &= -T(0)^{-1} T'(0). \end{aligned} \tag{12}$$

$T(0)$ が right-shift operator であることを考慮すると H は Yang-Baxter operator $X_i(u)$ を用いて

$$\begin{aligned} H &= \sum_i H_{i,i+1} \\ H_{i,i+1} &= -\left. \frac{\mathrm{d}X_i(u)}{\mathrm{d}u} \right|_{u=0} \end{aligned} \tag{13}$$

と表される. 特に 6 頂点模型, self-dual Potts 模型などの Temperley-Lieb 代数で記述される模型の場合, $H_{i,i+1}$ は '定数 + U_i' (U_i は Temperley-Lieb operator) の形になる.

Baxter の公式 (12) は $T(u)$ の最大固有値と, H の基底状態エネルギー (絶対零度の性質) との間の関係を与える. この公式は量子系の有限温度分配関数

$$Z^Q(\beta) = \mathrm{Tr} e^{-\beta H} \tag{14}$$

の計算にも有効である. (12) 式は展開 $T(u) = T(0)(1 - u \cdot H) + O(u^2)$ を与えるが, これから公式

$$e^{-\beta H} = \lim_{M \to \infty} \left[T(0)^{-1} T(\frac{\beta}{M}) \right]^M \tag{15}$$

が得られる. この公式に基づき, さらにある trick を用いると $Z^Q(\beta)$ が diagonal-to-diagonal transfer matrix の最大固有値の有限サイズ効果として正確に計算できる.

5 YBR の解法

厳密に解ける模型を見つけるには, YBR を満たすボルツマン重率をみつければよい. それには, YBR をボルツマン重率に対する関数方程式とみなしてこれを解けばよい. 難点は, この方程式系は非常な過剰決定系になっているため, 解の存在自体が自明ではないことである.

現在では, 多くの無限列を含む非常に多くの解が知られている. これらの解は何らかの方法により発見または構成されたものである. その「方法」には次ようなものがある.

[1] YBR からボルツマン重率に対する (多項式型) 拘束条件式を導きそれを uniformize する parametrization を得る.

[2] 適当な初期条件を仮定し, u で微分して多元連立非線形微分方程式になおして解く.

[3] めのこで解く. 具体的には, 強い対称性をもった模型を考え, 解があると信じ, これまでの経験に基づいてある程度解の予想をたて, 実際解であることを確かめる.

[4] 組みひも群の表現行列 b_i $(= \lim_{u \to \infty} X_i(u))$ をもとめ, その後何らかの方法で u を復活する.

[5] 古典 YBR を quantize する.

[6] すでに知られている解を「合成して」新たな解をつくる ('fusion') .

[1] の方法は解の「完全分類」という立場からは best であるが, 最も労力が大きい. 以下番号が上がるにつれて「楽に」なるが, その代償として解の「取りこぼし」が生ずる.

6 物理量の計算法

可解条件式の解をもとめること, つまり「解ける」模型を得ることと, その模型に付随した種々の物理量を計算することは一応別問題である. 計算すべき物理量としては

[1] free energy, specific heat 等, $T(u)$ の最大固有値のみで決まる bulk の thermal な量.

[2] correlation length, interface tension 等, 最大固有値以外の固有値に関する情報が必要なもの.

[3] magnetization, polarization 等の order parameter, 1 点関数 (local height probability 等).

[4] 2 点関数以上の correlation function や susceptibility 等の応答関数

[5] critical exponents

[6] finite size correction, central charge

[7] 1 次元量子系の種々の量 (ground state energy, 有限温度 free energy, excitation spectrum, space-time correlation function, ...)

などいろいろある. このうち bulk free energy に関しては $T(u)$ のみたす関係式 (inversion relations) に基づくきわめて簡便かつ有効な方法がある. 1 点関数については corner transfer matrix による方法がある. しかしながら現状ではこれらの方法の有効性は, 比較的対称性のよい模型に限定されている. より一般の模型や他の物理量の計算においては (現状では) Bethe Ansatz (QISM における algebraized Bethe Ansatz も含めて) 法が不可欠である.

7 他の問題との関係

YBR に基づく可解格子模型の系統的研究が始まってから約 10 年になるが, その初期には考えられなかったほどに種々の問題との関連が明らかになってきた. 例えば

- 数論
- conformal field theory
- von Neumann 環
- 量子群
- 結び目理論
- topological quantum field theory
- ......

などが挙げられる. これは YBR が「単なる」可解条件式などではなく, まだ我々にはその本質が十分にはとらえきれていない, 何か非常に深い物理的・数学的実体であることを示唆している.

8 基本問題

ここでは現在の時点でまだ十分には解決されていない問題や今後の問題を思いつくままに挙げてみたい.

- YBR の解法の整備
- YBR にはいったいどれだけの種類の解があるのか? (分類問題).
- 具体的な物理系への応用例をできるだけ多く探すこと. (表面・界面の系など)
- QISM の整備: 物理量計算の簡単化
- 与えられた因子化 S 行列からそれを S 行列としてもつ量子系の Hamiltonian を具体的につくること. (再現問題)
- YBR の解から作られる結び目・絡み目の不変量には, いったいどれだけの種類のものがあるのか? またその強さは?
- YBR の高次元化
- いったい YBR とは何なのか?

References

本文中では具体的な個々の文献は挙げなかった. 以下の本・総説およびそれらの引用文献を参照されたい.

[1] R.J. Baxter: *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, 1982).

[2] Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati: in *Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics*, eds. C. N. Yang and M. L. Ge (World Scientific, 1989)p. 151. およびこの本の他の著者達による論文.
T. Deguchi, M. Wadati and Y. Akutsu: Adv. Stud. Pure Math. **19** (1989) 193.
M. Wadati, T. Deguchi and Y. Akutsu: Phys. Rep. **180** (1989) 247.