# ソリトン問題における$\tau$函数理論

東京大学工学部物理工学科　薩摩順吉

## 1. はじめに

１９８１年以降、佐藤幹夫氏を中心とした主に京都大学数理解析研究所のグループが展開してきた$\tau$函数の理論は、ソリトン方程式およびその解の代数構造を明らかにした画期的な理論である。

ここでは、特にソリトン方程式と普遍グラスマン多様体との関係を発見した佐藤氏自身の成果（以下では、佐藤理論と呼ぶことにする）を、できる限り分かりやすく説明することを試みる。そのために、高級な数学的述語を用いることは極力は避けることにする。その後、佐藤理論の多成分系や離散系への拡張について述べる。また、それらの結果を用いて、ソリトン方程式のもつ保存量や対称性について議論するとともに、$\tau$函数の理論自身の拡張可能性についても触れる。

## 2. 佐藤方程式

佐藤理論の基礎は、常微分方程式の解に関する基本的な結果にある。次のような作用素（擬微分作用素という）を考える。

$$W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + w_3\partial^{-3} + \cdots .$$

ただし、$w_j$ は $x$ の関数で $\partial^{-n}$ は形式的に $\partial^{-n} = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{-n}$ で定義されている。これは、Leibnitz 則、

$$\partial^n f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}\frac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}\partial^{n-r}$$

を, $n$ が負の整数の場合にも成り立つとして導入されたものである。簡単のために有限個の項からなる $W(=W_m) = \partial^m + w_1\partial^{m-1} + \cdots + w_m$ について次の常微分方程式を考える。

$$W_m\partial^m f(x) = (\partial^m + w_1\partial^{m-1} + \cdots + w_m)f(x) = 0$$

この式は、$m$ 個の一次独立な解 $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(m)}(x)$ を持つが、すべて

$$f^{(j)}(x) = \xi_0^{(j)} + \frac{1}{1!}\xi_1^{(j)}x + \frac{1}{2!}\xi_2^{(j)}x^2 + \cdots , \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

のように Taylor 展開できるとする。このとき、その係数からなる行列

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_0^{(1)} & \xi_0^{(2)} & \cdots & \xi_0^{(m)} \\ \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

のランクは $m$ で、$\Xi$ は

$$W_m \partial^m (1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \ldots)\Xi = 0$$

を満足する。一次独立な解から逆に $W_m$ を構成すると、

$$W_m = \frac{\begin{vmatrix} f^{(1)} & \cdots & f^{(m)} & \partial^{-m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \partial^{m-1} f^{(1)} & \cdots & \partial^{m-1} f^{(m)} & \partial^{-1} \\ \partial^m f^{(1)} & \cdots & \partial^m f^{(m)} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^{(1)} & \cdots & f^{(m)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial^{m-1} f^{(1)} & \cdots & \partial^{m-1} f^{(m)} \end{vmatrix}}$$

が得られる。この式の分母は Wronskian になっていることを注意したい。

さて、ここで $x$ 以外の独立変数を持ち込む。シフト作用素

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} \exp(x\Lambda) &= I + x\Lambda + \frac{x^2}{2!}\Lambda^2 + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & \cdots \\ & 1 & x & x^2/2! & \cdots \\ & & 1 & x & \cdots \\ & \mathbf{0} & & 1 & \cdots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

と書けるが、これを用いて、

$$H(x) \equiv \exp(x\Lambda)\,\Xi = \begin{pmatrix} f^{(1)} & f^{(2)} & \cdots & f^{(m)} \\ \partial f^{(1)} & \partial f^{(2)} & \cdots & \partial f^{(m)} \\ \partial^2 f^{(1)} & \partial^2 f^{(2)} & \cdots & \partial^2 f^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

と表わすことができる。いま、解 $f^{(j)}$ が無限個の時間変数 $t=(t_1=x,t_2,t_3,\ldots)$ にも依存しているとする。ただし、その依存の仕方は、$H(x;t)=\exp x\Lambda\,\exp\eta(t,\Lambda)\Xi$ であると考える。ここで、$\eta(t,\Lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n\Lambda^n$ である。$\exp\eta(t,\Lambda)$ を次のように形式的に展開する。

$$\exp\{t_1\Lambda+t_2\Lambda^2+t_3\Lambda^3+\cdots\}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\Lambda^n$$

展開係数は

$$p_0=1\ ,\ p_1=t_1\ ,\ p_2=\frac{1}{2}(t_1)^2+t_2\ ,\ p_3=\frac{1}{6}(t_1)^3+(t_1)t_2+t_3\ .$$

のような多項式であり、$\frac{\partial p_n}{\partial t_m}=p_{n-m}$ , $\quad (p_n=0\ \text{for}\ n<0)$ というきれいな性質を持っており、対称群の表現論で重要な役割を果たしているものである。この多項式を用いて時間変数も考慮した $H(x;t)$ は、

$$H(x;t)=\begin{pmatrix}1 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots\\ & 1 & p_1 & p_2 & \cdots\\ & & 1 & p_1 & \cdots\\ & 0 & & 1 & \cdots\\ & & & & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0^{(1)} & \xi_0^{(2)} & \cdots & \xi_0^{(m)}\\ \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(m)}\\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \cdots & \xi_2^{(m)}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\end{pmatrix}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}h_0^{(1)}(x;t) & h_0^{(2)}(x;t) & \cdots & h_0^{(m)}(x;t)\\ h_1^{(1)}(x;t) & h_1^{(2)}(x;t) & \cdots & h_1^{(m)}(x;t)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\end{pmatrix}$$

と表わせる。ここで、$h_0^{(j)}(x;t)$ は初期値 $h(x;0)=f^{(j)}(x)$ を持つ線形偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_n}-\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right)h(x;t)=0\ ,\qquad n=1,2,\ldots$$

の解である。また、$h_n^{(j)}(x;t)=\frac{\partial h_0^{(j)}(x;t)}{\partial t_n}=\frac{\partial^n h_0^{(j)}(x;t)}{\partial x^n}$ も成り立っている。$W_m$（すなわちその係数 $w_j$）も時間変数 $t$ に依存しているとすると、これまでの結果から、

$$W_m(x;t)=\frac{\begin{vmatrix}h_0^{(1)} & \cdots & h_0^{(m)} & \partial^{-m}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ h_{m-1}^{(1)} & \cdots & h_{m-1}^{(m)} & \partial^{-1}\\ h_m^{(1)} & \cdots & h_m^{(m)} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}h_0^{(1)} & \cdots & h_0^{(m)}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ h_{m-1}^{(1)} & \cdots & h_{m-1}^{(m)}\end{vmatrix}}$$

と表わすことができる。なお、この式の分母が後述の $\tau$ 函数である。

このようにして構成した $W(x;t)$ の時間発展を表わす式は、常微分方程式の解の性質を用いて得られ、

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\partial^n \ ,$$
$$B_n = (W\partial^n W^{-1})^+$$

となるが、これは最初に定義した $W$ に対しても成り立つものである。ただし、$(\ )^+$ は作用素の中で $\partial^{-n}$ を含まない部分を表わす。この式が佐藤方程式である。

## 3. KP方程式系

佐藤方程式から、ソリトン理論で重要な Lax 形式や Zakharov-Shabat 形式が自然に導かれる。たとえば、

$$L = W\partial W^{-1}\ , L = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + u_4\partial^{-3} + \cdots$$

という作用素を考えると、これは一般化された Lax 形式

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L] = B_n L - L B_n \ ,$$

を満足することが示せる。ただし、$B_n = (L^n)^+$ であり、具体的には, $B_1 = \partial$ , $B_2 = \partial^2 + 2u_2$ , $B_3 = \partial^3 + 3u_2\partial + 3u_3 + 3u_{2,x}$ と表わされる。この Lax 形式から無限個の非線形方程式が得られるが、意味のある最も簡単なものが Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式、

$$\frac{\partial}{\partial x}(4\frac{\partial u_2}{\partial t_3} - 12u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}) - 3\frac{\partial^2 u_2}{\partial t_2^2} = 0$$

であるので、KP 方程式系と呼ばれている。

Lax 形式に付随した線形問題

$$L\psi = \lambda\psi\ , \frac{\partial \psi}{\partial t_n} = B_n\psi\ , \frac{\partial \lambda}{\partial t_n} = 0$$

を考えると、$L$ の定義から, $\psi$ は佐藤方程式中の $w_j$ と直接関係がつき、

$$\psi = (1 + \frac{w_1}{\lambda} + \frac{w_2}{\lambda^2} + \cdots)\exp(t_0 + \lambda t_1 + \lambda^2 t_2 + \cdots)$$

と表わされる。以上の結果, KP 方程式系に含まれる方程式の解は佐藤方程式の解に密接に関係していることがわかる。

4．$\tau$ 函数

2 節で提出した佐藤方程式の解は $w_j$ でみたとき、分母が Wronskian 、分子がそれに対してある微分を施したものになっており、分母が解の構成において重要な役割を果していることになる。これを $\tau$ 函数という。すなわち、

$$\tau(x;t)=\begin{vmatrix} h_0^{(1)} & \ldots & h_0^{(m)} \\ h_1^{(1)} & \ldots & h_1^{(m)} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ h_{m-1}^{(1)} & \ldots & h_{m-1}^{(m)} \end{vmatrix}$$

ここでは、その構造を調べてみることにする。

$\tau$ 函数は、行列 $H(x;t)$ の最初の $m$ 行をとってきたものの行列式になっている。その結果、行列の積の行列式に対する展開定理を用いると、

$$\tau(t)=\sum_{0\leq\ell_1<\ell_2<\cdots<\ell_m} S_Y(t)\,\xi_Y$$

ただし、

$$S_Y(t)=\begin{vmatrix} p_{\ell_1} & p_{\ell_2} & \cdots & p_{\ell_m} \\ p_{\ell_1-1} & p_{\ell_2-1} & \cdots & p_{\ell_m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{\ell_1-m+1} & p_{\ell_2-m+1} & \cdots & p_{\ell_m-m+1} \end{vmatrix}$$

および、

$$\xi_Y=\begin{vmatrix} \xi_{\ell_1}^{(1)} & \xi_{\ell_1}^{(2)} & \ldots & \xi_{\ell_1}^{(m)} \\ \xi_{\ell_2}^{(1)} & \xi_{\ell_2}^{(2)} & \ldots & \xi_{\ell_2}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \xi_{\ell_m}^{(1)} & \xi_{\ell_m}^{(2)} & \ldots & \xi_{\ell_m}^{(m)} \end{vmatrix}$$

と表わされる。ここで、和は $m$ 個の非負の整数のすべての可能な組合せに対してとられている。

数の組 $(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_m)$ に対して、佐藤氏考案の Maya ゲームという石並べゲームが対応する。また、 Maya ゲームと Young 図形との間に 1 対 1 の対応がある。その結果を使うと、$\tau$ 函数は

$$\tau(t)=\sum_{\phi\leq Y\leq m\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\right.} S_Y(t)\,\xi_Y$$

と書けることがわかる。上式で、和は $m+1$ 行よりも小さなすべての Young 図形に対してとられている。

一般に、任意の解析函数は $S_Y(t)$ を用いて、$f(t)=\sum_Y S_Y(t)\,c_Y$ と展開できる。ただし、直交条件から、$c_Y=S_Y(\tilde{\partial}_t)f(t)|_{t=0}$ となる。また、$\tilde{\partial}_t=(\frac{\partial}{\partial t_1},\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2},\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3},\ldots)$ である。$\tau$ 函数の場合、その構造上係数 $\xi_Y$ は Plücker 関係式という拘束条件を満足することが必要となる。ここで簡単な例でみてみることにしよう。$k,\ \ell_1<\ell_2<\ell_3$ に対して、次の恒等式が成立する。

$$\begin{vmatrix} \xi_k^{(1)} & \xi_{\ell_1}^{(1)} & \xi_{\ell_2}^{(1)} & \xi_{\ell_3}^{(1)} \\ \xi_k^{(2)} & \xi_{\ell_1}^{(2)} & \xi_{\ell_2}^{(2)} & \xi_{\ell_3}^{(2)} \\ 0 & \xi_{\ell_1}^{(1)} & \xi_{\ell_2}^{(1)} & \xi_{\ell_3}^{(1)} \\ 0 & \xi_{\ell_1}^{(2)} & \xi_{\ell_2}^{(2)} & \xi_{\ell_3}^{(2)} \end{vmatrix}=0$$

上式をラプラス展開すると、

$$\begin{vmatrix} \xi_k^{(1)} & \xi_{\ell_1}^{(1)} \\ \xi_k^{(2)} & \xi_{\ell_1}^{(2)} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi_{\ell_2}^{(1)} & \xi_{\ell_3}^{(1)} \\ \xi_{\ell_2}^{(2)} & \xi_{\ell_3}^{(2)} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \xi_k^{(1)} & \xi_{\ell_2}^{(1)} \\ \xi_k^{(2)} & \xi_{\ell_2}^{(2)} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi_{\ell_1}^{(1)} & \xi_{\ell_3}^{(1)} \\ \xi_{\ell_1}^{(2)} & \xi_{\ell_3}^{(2)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \xi_k^{(1)} & \xi_{\ell_3}^{(1)} \\ \xi_k^{(2)} & \xi_{\ell_3}^{(2)} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi_{\ell_1}^{(1)} & \xi_{\ell_2}^{(1)} \\ \xi_{\ell_1}^{(2)} & \xi_{\ell_2}^{(2)} \end{vmatrix}=0$$

いま、$(k,\ell_1,\ell_2,\ell_3)=(0,1,2,3)$ と選ぶと、これは

$$\xi_{\phi}\xi_{(2,2)}-\xi_{(1)}\xi_{(2,1)}+\xi_{(2)}\xi_{(1,1)}=0$$

に同じである。$S_Y$ の直交性、$S_Y(\tilde{\partial}_t)S_{Y'}(t)|_{t=0}=\delta_{YY'}$ , を用いると、$\xi_Y(s)=S_Y(\tilde{\partial}_s)\tau(s)$ と書けるので、上式は

$$S_{\phi}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)\,S_{(2,2)}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)-S_{(1)}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)\,S_{(2,1)}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)+S_{(2)}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)\,S_{(1,1)}(\tilde{\partial}_t)\tau(t)=0$$

となる。$S_Y$ の定義を用いると、これはさらに、

$$(4D_{t_1}D_{t_3}-D_{t_1}{}^4-3D_{t_2}{}^2)\tau(t)\cdot\tau(t)=0$$

と書ける。ただし、$D$ は広田の演算子である。上式は双一次形式で書かれた KP 方程式に他ならない。この結果を一般化すると、$\tau$ 函数を $S_Y(t)$ で展開した式から KP 方程式系が直接出てくることがわかる。

最後に、佐藤方程式、Lax 方程式および付随した線形問題に現われる変数はたとえば、

$$w_j=\frac{1}{\tau}p_j(-\tilde{\partial}_t)\,\tau\ ,\ u_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau\ ,\ \psi=\frac{\tau(t_1-\frac{1}{\lambda},t_2-\frac{1}{2\lambda^2},\ldots)}{\tau(t_1,t_2,\ldots)}e^{t_0+\lambda t_1+\lambda^2 t_2+\cdots}$$

と書けることを指摘しておく。

## 5．$\tau$ 函数理論の拡張と応用

$\tau$ 函数理論は初めて提出されて以降、さまざまな方程式系に拡張されてきた。ここで、そのうちの二つを紹介しよう。一つは多成分 KP 方程式系である。擬微分作用素

$$W \equiv E + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + w_3\partial^{-3} + \cdots$$

を考える。ここで、$E$ は $r\times r$ 単位行列、$w_j$ はその成分が $x$ と $t=(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \cdots, t_1^{(r)}, t_2^{(r)}\cdots)$ に依存している $r\times r$ 行列である。作用素

$$\begin{aligned} L &\equiv W\partial W^{-1} = \partial + u^{(2)}\partial^{-1} + u^{(3)}\partial^{-2} + \cdots, \\ C^{(i)} &\equiv WE_iW^{-1} = E_i + c^{(i1)}\partial^{-1} + c^{(i2)}\partial^{-2} + \cdots, \\ B_n^{(i)} &\equiv (C_iL^n)_+ \quad i = 1, \cdots, r, \end{aligned}$$

を導入すると、3 節と同様

$$\frac{\partial L}{\partial t_n^{(i)}} = [B_n^{(i)}, L], \frac{\partial C^{(j)}}{\partial t_n^{(i)}} = [B_n^{(i)}, C^{(j)}]$$

の一般化された Lax 形式が得られる。ここで $\partial/\partial t_1^{(1)} + \partial/\partial t_1^{(2)} = \partial/\partial x$ の関係が成立していることを注意しておく。$r = 2$ の場合にこの形式から得られるもっとも簡単な非線形方程式は

$$\frac{\partial c_{12}^{(11)}}{\partial t_2^{(1)}} - \frac{\partial^2 c_{12}^{(11)}}{\partial t_1^{(1)2}} = -2c_{12}^{(11)2}c_{21}^{(11)} + 2c_{12}^{(11)}u_{11}^{(2)}\ ,\ \frac{\partial u_{11}^{(2)}}{\partial t_1^{(2)}} = (\frac{\partial}{\partial t_1^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial t_1^{(2)}})(c_{12}^{(11)}c_{21}^{(11)}), \cdots$$

のようなものである。いま、

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{i}{4}(\frac{\partial}{\partial t_2^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial t_2^{(2)}}),\ \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\partial}{\partial t_1^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial t_1^{(2)}}),\ \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\partial}{\partial t_1^{(1)}} - \frac{\partial}{\partial t_1^{(2)}}),$$

$$Q = \frac{1}{4}(u_{11}^{(2)} + u_{22}^{(2)}),\ c_{12}^{(11)} = A,\ c_{21}^{(11)} = A^*$$

の変数変換を施すと、上式は

$$iA_T + A_{XX} + A_{YY} = |A|^2A - 2QA,\ -Q_{XX} + Q_{YY} = -|A|^2_{XX}$$

となるが、これは Davey-Stewartson 方程式に他ならない。

もう一つの拡張は 2 次元戸田方程式系である。差分作用素

$$\begin{aligned} W^{(\infty)}(s) &= 1 + w_1^{(\infty)}(s)e^{-\partial_s} + w_2^{(\infty)}(s)e^{-2\partial_s} + w_3^{(\infty)}(s)e^{-3\partial_s} + \cdots \\ W^{(0)}(s) &= w_0^{(0)}(s) + w_1^{(0)}(s)e^{\partial_s} + w_2^{(0)}(s)e^{2\partial_s} + w_3^{(0)}(s)e^{3\partial_s} + \cdots \end{aligned}$$

を考える。作用素

$$L = W^{(\infty)}e^{\partial_s}W^{(\infty)-1} = e^{\partial_s} + u_1(s) + u_2(s)e^{-\partial_s} + u_3(s)e^{-2\partial_s} + \cdots$$
$$M = W^{(0)}e^{-\partial_s}W^{(0)-1} = v_0(s)e^{-\partial_s} + v_1(s) + v_2(s)e^{\partial_s} + v_3(s)e^{2\partial_s} + \cdots$$

を導入すると、やはり 3 節と同様、

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = [B_n(s), L] \ , \frac{\partial L}{\partial y_n} = [C_n(s), L] \ , \frac{\partial M}{\partial x_n} = [B_n(s), M] \ , \frac{\partial M}{\partial y_n} = [C_n(s), M] \ ,$$

の一般化された Lax 形式を得る。ただし、$B_n(s) = (L^n)_+$ , $C_n(s) = (M^n)_-$ である。ここで、$_+$ は $e^{-\partial_s}$, $e^{-2\partial_s}, \cdots$ を含まない部分を表わし、$_-$ は $e^{0\partial_s}$, $e^{\partial_s}, \cdots$ を含まない部分を表わす。この形式から得られる自明でないもっとも簡単な方程式は

$$\frac{\partial v_0(s)}{\partial x_1} = v_0(s)\big(u_1(s) - u_1(s-1)\big) \ , \frac{\partial u_1(s)}{\partial y_1} = -v_0(s+1) + v_0(s)$$

となるが、これは 2 次元戸田方程式に帰着されるものである。

$\tau$ 函数理論はソリトン方程式の解の構造を明らかにしただけでなく、方程式の持つさまざまな性質について明解な解釈を与えた。ここで、$\tau$ 函数理論の一つの応用例として、ソリトン方程式の顕著な性質の一つである無限個の保存量及び対称性の存在について議論する。ただし、簡単のために KP 方程式に話を限ることにする。

微分作用素 $\partial$ を 3 節で与えた $L$ の逆べきで

$$\partial = L + \sigma_1^{(1)}L^{-1} + \sigma_2^{(1)}L^{-2} + \sigma_3^{(1)}L^{-3} + \cdots$$

のように表わす。$L$ の定義と比較することによって、$\sigma_j^{(1)}$ は $u_n$, $n = 2, 3, \cdots$ で書くことができる。上式を線形問題の解 $\psi$ に作用させ $L\psi = \lambda\psi$ を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial x} log\, \psi = \lambda + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(1)}/\lambda^j$$

が得られる。これから

$$\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t_n} log\, \psi\right) \ , \sigma^{(1)} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(1)}/\lambda^j$$

となり、$\psi$ を $\lambda$ で展開して、$\lambda$ のべきを比較することにより、各 $\sigma_j^{(1)}$ が保存密度を与えることがわかる。Lax 形式を用いて、$u_3, u_4, \cdots$ を $u_2$ で表現すると、 $\sigma_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3, \cdots$ は

KP 方程式の無限個の保存密度を表わすことになる。さらに、$\psi$ に対して、$\frac{\partial}{\partial x}(\psi\psi^*)$ は線形化された KP 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t_3}-\frac{1}{4}\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}-3\frac{\partial}{\partial x}(uS)-\frac{3}{4}\partial_x^{-1}\frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2}=0$$

を満足していることが示せ、その結果、$\frac{\partial}{\partial x}(\psi\psi^*)$ を $\lambda$ で展開したものは KP 方程式の無限個の対称性を与えることがわかる。なお、$\tau$ 函数による表現を用いると、各対称性は $u_2$ を佐藤理論で導入された無限個の時間変数 $t_n$ で微分したものになっていることも示せる。

## 6. おわりに

これまで $\tau$ 函数の理論の紹介と拡張および応用についての議論を行なってきた。興味あるテーマとして、(とくに高次元問題へ) さらに拡張できるかということが挙げられる。その点について最近の研究結果の一つを紹介して稿を閉じることにする。

4 節で述べたように、$\tau$ 函数が KP 方程式の解になっていることは、恒等的に 0 である行列式をラプラス展開することによって示せた。同様の手法を

$$\left|\begin{array}{c:c:c:c}
A\ \begin{matrix} f_{(n-1)x_1}\\ f_{(n-1)x_1y_1}\\ \vdots\\ f_{(n-1)x_1(n-2)y_1}\\ f_{(n-1)x_1(n-1)y_1}\\ f_{(n-1)x_1ny_1}\end{matrix} & 0 & 0 & \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\\ \hdashline
0 & A\ \begin{matrix} f_{nx_1}\\ f_{nx_1y_1}\\ \vdots\\ f_{nx_1(n-2)y_1}\\ f_{nx_1(n-1)y_1}\\ f_{nx_1ny_1}\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\\ \hdashline
0 & 0 & A\ \begin{matrix} f_{(n+1)x_1}\\ f_{(n+1)x_1y_1}\\ \vdots\\ f_{(n+1)x_1(n-2)y_1}\\ f_{(n+1)x_1(n-1)y_1}\\ f_{(n+1)x_1ny_1}\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}
\end{array}\right|=0$$

の行列式に適用してみる。ここで $A$ は

$$A=\begin{pmatrix} f & f_{x_1} & \cdots & f_{(n-2)x_1} \\ f_{y_1} & f_{x_1y_1} & \cdots & f_{(n-2)x_1y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(n-2)y_1} & f_{x_1(n-2)y_1} & \cdots & f_{(n-2)x_1(n-2)y_1} \\ f_{(n-1)y_1} & f_{x_1(n-1)y_1} & \cdots & f_{(n-2)x_1(n-1)y_1} \\ f_{ny_1} & f_{x_1ny_1} & \cdots & f_{(n-2)x_1ny_1} \end{pmatrix}$$

で与えられる行列である。この行列式をラプラス展開した式から、$f$ が $\partial f/\partial x_k=\partial^k f/\partial x_1^k$, $\partial f/\partial y_k=\partial^k f/\partial y_1^k$ を満足しているとき、

$$\tau=\begin{vmatrix} f & f_{x_1} & \cdots & f_{(n-1)x_1} \\ f_{y_1} & f_{x_1y_1} & \cdots & f_{(n-1)x_1y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(n-1)y_1} & f_{(n-1)y_1x_1} & \cdots & f_{(n-1)x_1(n-1)y_1} \end{vmatrix}$$

は 3 次形式で書かれた方程式、

$$\begin{vmatrix} p_i(\tilde\partial)p_l(-\tilde\partial')\tau & p_i(\tilde\partial)p_m(-\tilde\partial')\tau & p_i(\tilde\partial)p_n(-\tilde\partial')\tau \\ p_j(\tilde\partial)p_l(-\tilde\partial')\tau & p_j(\tilde\partial)p_m(-\tilde\partial')\tau & p_j(\tilde\partial)p_n(-\tilde\partial')\tau \\ p_k(\tilde\partial)p_l(-\tilde\partial')\tau & p_k(\tilde\partial)p_m(-\tilde\partial')\tau & p_k(\tilde\partial)p_n(-\tilde\partial')\tau \end{vmatrix}=0$$

の解となることが示せる。ここで、$\tilde\partial'$ は $\tilde\partial'=(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y_3},\cdots)$ で定義されているものである。$(i,j,k)=(l,m,m)=(0,1,2)$ のもっとも簡単な場合、上の方程式は変数変換 $w=\frac{\partial}{\partial y_1}log\,\tau$, $q=-2p_2(-\tilde\partial')log\,\tau$ によって、

$$w_{y_2}=(w_{y_1}+q)_{y_1},\ (q_{x_2}+q_{x_1x_1})w_{x_1}-(w_{x_2}+w_{x_1x_1})q_{x_1}-2w_{x_1}^3=0$$

の結合型方程式に帰着される。これは 4 次元の方程式であり、上記の 3 次形式で表わされる方程式は本質的に新しい系を与えていると考えることができる。

参考文献

1) M. Sato, RIMS Kokyuroku **439**(1981), 30.

2) M. Sato and Y. Sato, in *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science* ed. by H. Fujita, P. D. Lax and G. Strang (Kinokuniya / North-Holland, Tokyo, 1983) 259.

3) M. Sato, Notes by M. Noumi, Sophia Kokyuroku in Math. (1984), No. 18 (in Japanese).

4) E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo and T. Miwa, in *Non-linear Integrable Systems—Classical Theory and Quantum Theory*, ed. by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983), 39.
5) M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19**(1983), 943.
6) M. Mulase, Math. Sci. (1982), No. 228 (in Japanese).
7) K.Ueno and K.Takasaki, *Group Representation and Systems of Differential Equations*, Adv. Stud. in Pure Math. **4**(Kinokuniya, Tokyo, (1984)), 1.
8) Y.Ohta, J.Satsuma, D.Takahashi and T.Tokihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988), 210.
9) J.Matsukidaira, J.Satsuma and W.Strampp, to appear in J. Math. Phys. (1990)
10) K.Kajiwara, J.Matsukidaira and J.Satsuma, to appear in Phys. Lett. A. (1990)
11) J.Matsukidaira, J.Satsuma and W.Strampp, to appear in Phys. Lett. A. (1990)
12) K.Kajiwara and J.Satsuma, submitted to J. Math. Phys.