研究会報告

非線形マシュウ方程式に於けるカオスの階層構造

筑波大　物質工　金野秀敏

無限自由度系のカオスの複雑さに関する研究が盛んに行われてきている。一方、カオスの熱統計力学を目指した研究も行われつつあり、位相空間に於けるカオス状態の変化を非平衡系の相転移としてとらえる試みが盛んに研究されている。しかし、ほとんどは簡単な離散写像（Henon, Lozi 写像等）を用いた位相空間内状態変化についての研究であり、多くの課題が残されている。

その課題の1つは、簡単な離散写像は現実に存在する系を記述する連続変数の微分方程式のある特殊のパラメータ領域におけるカオスを近似するモデルにすぎない点から生ずる。連続変数のモデルの特徴は、モデルの中に含まれる非平衡パラメータ（外力の振幅、散逸、外力周波数と自然周波数との比等）を変化させるとカオス領域が位相空間内で住分け階層構造を形成する点にある。そこに、注目する物理系の多様性と固有の法則性を見いだす事が出来る場合も多く存在する。

その簡単な例として、固有（自然）周波数がパラメータ励振されている簡単な非線形振動子の1つである非線形マシュウ(Mathieu)方程式

$$X_{tt} + k X_t + (1+ \Gamma \sin \omega t) X + X^3 = 0 \tag{1}$$

に於けるカオスの階層構造を報告した。k、 Γ 及び ω はそれぞれ散逸係数、外力の振幅、外力の周波数であり、自然周波数は1に規格化されている。この方程式は弾性表面波系やレーザ系のパラメータ励振モデルとも見なす事が出来よう。

この系の安定、不安定領域は線形マシュウ方程式

$$X_{tt} + k X_t + (1+ \Gamma \sin \omega t) X = 0 \tag{2}$$

で決定され、その領域は詳しく調べられている。ここで問題にするのは、非線形項の存在する場合の不安定領域内のカオスの存在である。カオスの発生を予測可能なメルニコフ(Mel'nikov)の方法はこの系には適用出来ない。

(k, Γ) 空間ではカオスはΓの増大と共に位相空間内を一様に生め尽くすのではなく一定のギャップを置いて住分けて居る。ギャップはΓが小さい場合は倍周期化のシーケンスにより成り立って居るが、Γが大きくなると3倍周期が基調となる傾向を持つ。

(ω, Γ) 空間では帯状のカオス領域は倍周期化のシーケンスを分離する境界線と自己相似な形状をなす。

いずれにせよ、異なるカオス領域では、異なる組合せもモード競合の結果としてカオスが発生して居る。この事情は周期領域についても言える。例えば、2周期（Π_2）領域でもΓの小さな場合のそれと大きな場合のそれでは主要モードが異なりモードバランスの仕組みも異なっている。

以上、カオスの熱統計力学をめざすにあたり、次の様な観点を考慮する事が重要と思われる：

（Ａ）離散系ではパラメータの変化に伴い倍周期化の後カオス（ストレンジ*アトラクタ）が発生しても、さらにパラメータを大きくするとアトラクタの崩壊が起こり写像の軌道点は無限遠へと飛び去る事が多い。しかし、連続系では、その様なアトラクタの崩壊後、新しいモードバランスが発生し新たなアトラクタが生じカオスの階層構造を形成している。

（Ｂ）簡単な離散系に基付くカオスの研究では、ポアンカレ写像の屈曲部の微細な構造が議論されてきた。しかし、非線形マシュウ方程式に現れたカオスでは、アトラクタの２次元構造はほとんど同じだが軌道点が２次元平面を横切る順番が異なる場合が見つかっている。この事は、アトラクタの構造の他にもう一つカオスを区別する指標の必要性を示している。

さらに別の言い方をすれば、カオスの熱統計力学の建設を現実の系との対応で考える際の問題点は（Ａ）モードバランスの仕組みを明確にする事；（Ｂ）時間を含んだ熱統計力学の枠組みを作る事であると言えよう。

しかし、上記の例は少数自由度系の場合であり、本質的に少数自由度系に逓減不可能な無限自由度をもつ系の”乱流的カオス”や”ソリトン場のカオス”の場合には依然として有効な指針も見いだされて居ない。この様な多体系の統計力学には、時間の要素を入れた枠組みの探索が不可欠であると考えられる。