神経場の確率学習方程式

東北大工基礎　原　啓明

新しいアイデアや概念を求めて，物理学の分野でも「脳」が行う情報処理の基礎過程が段々注目される様になってきた[1)-4)]．脳の情報処理過程は，これまで生理学をはじめいろいろ分野で研究されている．最近ではニューロコンピューターの開発をめざした神経回路網のモデルによる研究が盛んである．
特に興味ある問題として，神経回路網（ＮＷ）が外界の（パターン）を，どう”認識（識別）”して，その”標準パターン”をどう構築して行くか？という”学習過程”の問題がある．「学習過程」は，ＮＷが外界の状態を識別できる様に適当な”ルール”に従って，ＮＷの基本素子（ij）間の結合係数　J（＝ J_{ij}）を変化させる過程である．すなわち，初期値 J_0 のもとで，入力パターン X が カテゴリー A の”正解領域”（$J_t X > 0$）に属するように，J の値を逐次新しい値に修正して行く過程である．この過程を記述する学習方程式には，J の変化を決定論的に記述するものと[5)]，確率論的に記述する確率学習方程式[6)]がある．

本稿では，学習方程式を”神経場”の確率過程として定式化する．すなわち，「神経場」のモデルとしてランダム．ネットワーク（ＲＮＷ）（図１参照）提案し[7)-10)]，学習過程をＲＮＷの確率過程として一般化されたランダム・ウォーク（ＧＲＷ）の漸化式[9)]で記述する．この漸化式の形式解は経路積分で表示され，ＲＮＷの状態間の遷移確率がＲＮＷの構造を考慮して具体的に求められる．ＲＮＷは受容部（Recepter(R)）とクラスター（カテゴリー）の集団（合）で構成された系である．Ｒで符号化された入力パターン（情報源（ＩＳ）の状態）は クラスター集団の一部を”活性化”する．図１の斜線部分は活性化されたクラスターである．各クラスターは基本

素子の集合体である.

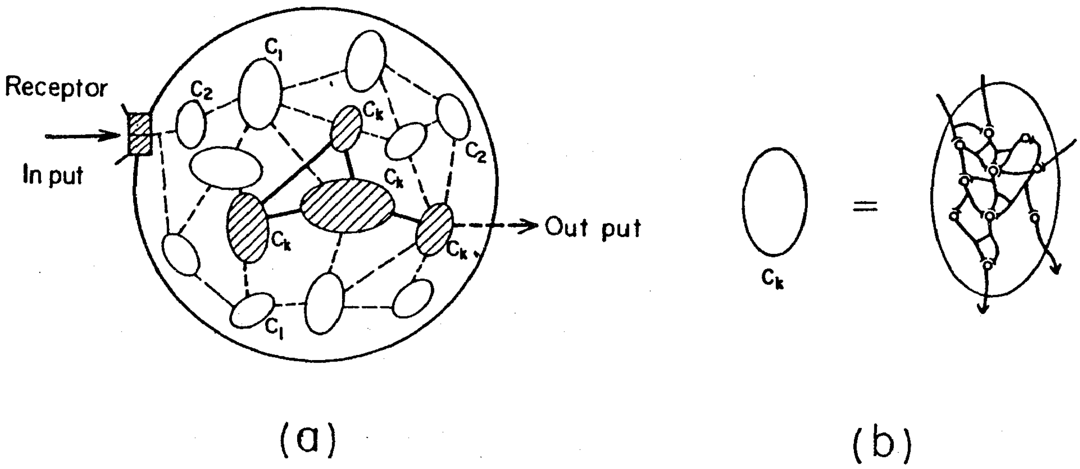

図1　ランダム・ネットワーク（ＲＮＷ）

クラスターの総数を $N^{(c)}$，クラスターの状態をスピン変数 $S_k^{(c)}$（＝±1）

$$S_k^{(c)} = \prod_{k \in C_k} s_k \qquad (1)$$

で表す．s_k は基本素子の状態を表すスピン変数である．

クラスター（i,j）間の結合係数を J_{ij} で表すと，i 番目のクラスターが「活性化される」条件は $(\Sigma_i J_{ij}^{(c)} S_j^{(c)} - h_i^{(c)}) > 0$ で表される．

ＲＮＷにおける「活性化された」クラスター（C_k）の個数は，クラスターの”エネルギー”分布 $P(E_k)$ から求められる．E_k は

$$E_k\ (= E_k(\tau)) = \sum_i \sum_j J_{ij}^{(c)} S_i^{(c)k} S_j^{(c)k} + \sum_i h_i^{(c)} S_i^{(c)k} \qquad (2)$$

である．添字 k は関係した量が入力パターン X_k で規定されている事を示

す．τ は $J_{ij}^{(0)}$ における学習効果を表すパラメターである．

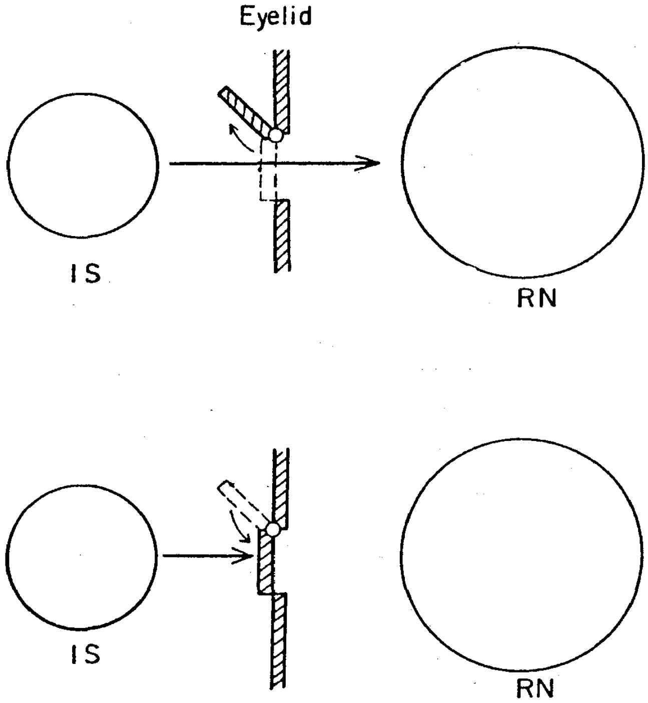

図２　ＲＮＷの状態 "Ｗ" と "Ｓ".

"まぶた"（Eyelid）（図２参照）の開閉によって，"Ｗ" と "Ｓ"をつくりだすマシーンを考える．「Ｗ」では，入力パターンを通じて情報源（ＩＳ）の状態 とＲＮＷの間には"情報接触"がある．ここでは，τ が τ_{st} に固定されている．　入力パターンが遮断された「Ｓ」では，τ は τ_0（$\ll \tau_{st}$）から自由に変動しながら，「Ｗ」の状態を再現しようと"自己組織化"を行う．この「自己組織化」の学習過程を以下で述べる確率過程によって定式化する．

まずクラスター集団を，活性化されたクラスター（スピンが活性化に関与している）と活性化に関与しないクラスターに分ける．前者に属するクラスターおいて $J_{ij}(\tau)$ がステップ N で離散値 m になる確率を $W(m,N)$ で表すと，$J_{ij}(\tau)$ の変化は $W(m,N)$（$N=\tau/\tau_0$）に対する "一般化されたランダム・ウォーク（ＧＲＷ）"[10]によって

$$W(m,N)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha} P^{\alpha}_{N-K}\,(m\,|\,m-(\alpha\cdot 1)k)\,W(m-(\alpha\cdot 1)k,\,N-K) \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{\alpha} P^{\alpha}_{N-K}\,(m+(\alpha\cdot 1)k\,|\,m)=1 \tag{4}$$

$$F:\ P^{\alpha}_{N-1}(\cdot)\ \rightarrow\ P^{\alpha}_{N}(\cdot) \tag{5}$$

と表される． $P^{\alpha}_{N-K}(m\,|\,m-(\alpha\cdot 1)k)$ は J の値がステップ $N-N_k$ で $m-(\alpha\cdot 1)k$ （$\alpha=+,-,0$）から m へ変化する遷移確率である．
(4) は $P^{\alpha}_{N-N}(\cdot)$ に関する規格化条件である． (5) の F は $P^{\alpha}_{N-1}(\cdot)$ から $P^{\alpha}_{N}(\cdot)^{k}$ への写像を表し， $P^{\alpha}_{N}(\cdot)$ の軌道を規定する．

J に関するＲＮＷの学習過程を調べるために (3) の漸化式を書換える．すなわち，連続変数 J（$= mc_0$：（c_0:J の単位）)，τ（$= N\tau_0$:（τ_0: 単位ステップ））を導入し，連続体極限をとると，(3) は Fokker-Planck(FP)方程式になる．この形式解で定義された"作用量" を最小にする条件で得られる Euler-Lagrange (EL) 方程式は

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} - (K_0^{(1)}+\Lambda)\frac{\partial \Lambda}{\partial J} - \frac{K_0^{(2)}}{2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial J^2} = 0 \tag{6}$$

となる[8]． ここで，$K_0^{(1)}$ は定数 $(a/\tau_0)[P^{+}-P^{-}]$，Λ は

$$\frac{a}{\tau_0}\,[\,P^{+}(\cdot) - P^{-}(\cdot)\,] = K_0^{(1)} + \Lambda(\cdot) \tag{7}$$

で定義された関数である．また $K_0^{(2)}$ は定数$(a^2/\tau_0)\,[P^{+}-P^{-}]$である．$\Lambda(\cdot)$が J に比例する［$\Lambda(\cdot)\sim i\omega J$,あるいは$\sim\omega J$($\omega$:定数>>1)］場合,(6) から J に対する振動解，または減衰解 が得られる． 特に，図２で示した「まぶた」開閉のサイクルをＷ－Ｓのリズムにとれば，振動解はＷ－Ｓの中に含まれるウルトラディアンリズム[11]に相当するものである．

次に，ＲＮＷ の応答特性を(3)における遷移確率 $P_N^{(0)}$ の過程として考える． クラスターは基本素子の状態を表すスピン（s_k）の集合体であること（(1)参照）に注意し，クラスター内部ではスケーリング則で規定され

た自己相似性を，クラスター間では相関を仮定する．　この条件下では，$P(\tau)$ $(=P_N^{(\theta)})$ の漸近形はパラメター化された指数（$\gamma=\log a/\log b(\varepsilon)$）のべき分布として与えられる[12)-13)]．

$$P(\tau)=Z\sum_{n=1}^{\infty} a^n b^n(\varepsilon)\, e^{-b^n(\varepsilon)\tau} \sim \tau^{-1-\gamma} \quad (8)$$

（$0<a,b<1$，Z：規格化定数）

となる．　これは $b(\varepsilon)$ がパラメター化された Weierstras（W）関数である[14)]．

以上の取扱では，クラスターを点，あるいは一様な広がりを持つ基本素子の集合体として考えた．しかしクラスターの広がりが一様でないときはクラスターを基本素子集合の"場"として再定式化する必要がある．このため変数 m を変数の組（$m_1,m_2,...,m_u=$）$\{m_i\}$で置き換える．たとえば，$W(m,N)$ は

$$W(m,N) \rightarrow W(\{m_i\},N) \quad (9)$$

と表す．　$W(\{m_i\},N)$ に対する漸化式は 連続体極限を取ると汎関数微分演算子（$\delta/\delta J(x)$）を含む FP 方程式になる．　さらに（6）相当する EL 方程式も $\delta/\delta J(x)$ を含んだ表式になる．　EL 方程式から特別の場合に，振動解と減衰解が得られる．　次に，RNW の応答特性を「場」の考えを取り入れて考える．　すなわち，$W(\{m_i\},N)$ の漸化式における遷移確率 で記述される過程を考える．　クラスターは基本スピン（$s(x)$）の集合体である．さらに，クラスターがスケーリング則で規定された自己相似性を満たし，クラスター間には相関があることを仮定すと，この条件下では，$P[\tau]$（$=P_N^{(\theta)}(\cdot)$）は（8）と同じW 関数となる．

生体や地殻等の複雑な系に対する応答を具体的に解析するときに，本稿で得られた $J(\tau)$，$J(x,\tau)$ の振動解，減衰解 あるいは $P(\tau)$，$P[\tau]$ の τ 依存性は，一つの視点を与えるものとなろう．

文献

1) J.J.Hopfield: Natl.Acad.ci.U.S.A.79 (1982) 2554; 81(1984),3088

2) D.Chowdhoury: Spin Glasses and other Flustrated Sysystems. Princeton Press (1986)

3) D.J.Amit: " Modeling Brain Function " The world of attractor neural networks (1989), Cambridge Univ. Press.

4) E.Aarts,and J.Kost: " Simulated Annealing and Boltmann Machines " A Stochastic Approach to Combinatorial optimization and Neural Computing (1989).John Wiley & Sons.

5) F.Rosenblatt:" Principles of Neurodynamics " Spartan Book.

6) S.Amari:IEEE. Trans. EC-16 (1967),299

7) 原 啓明：研究会発表,(1984)京大基研；数理科学 264 (1985),35 ;MBE 85-87(1986),59; MBE 87-12(1988),151
H.Hara;Science Form 1(1985),59
原 啓明，加藤健二，S.D.Choi:応用情報学年報 13 (1988),115
原 啓明，鈴木 彰：MBE 88-182 (1989) 157

8) H.Hara: Neural Network 1 suppl.183 (1988)
原 啓明:数理科学 319 (1990) 75
原 啓明:"神経回路網の物理"「新しい物性」6章（石原 明,和達三樹編）(1990) 共立出版

9) Y.Tamura and H.Hara:(to be submitted)

10) H.Hara: Phys.Rev. B15 (1979),4062; B31 (1985),4612 ;Z.Physik B 32 (1979),405 ; B39 (1980),261
H.Hara,T.Obata,and S.J.Lee: Phys.Rev. B37 (1988),476

11) 井上昌次郎："睡眠" 科学同人(1988)
山本光璋：医器学 59(1989) 109

12) H.Hara,O.K.Chung,and J.Koyama:(to be submitted)

13) 小山順二，原啓明：（投稿中）

14) M.F.Shlesiger and B.D.Hughes:Physica 109A (1981),115