マクロ系の波動関数

慶大・理工　　福　田　礼次郎

統計力学・観測理論にとってマクロ系の波動関数と系が記述されるヒルベルト空間の構造は本質的な役割を果たす。そのことについて述べる[1]。

I．マクロ系のハミルトニアン

ここでいうマクロ系とは自由度の多い（理想的には無限大）系を指す。まずマクロ系のハミルトニアン又はラグランジアンを次の様に取る。ここではマクロな体積 V 中で量子化されたボソン場 $\phi(\boldsymbol{x})$ を用いて，マクロ系は場の理論で扱う。N-粒子系なら $q_i(i=1\sim N)$を $\phi(\boldsymbol{x})$ の代りに用い $\int d^3\boldsymbol{x}$ を $\sum_{i=1}^{N}$ で置きかえればよい。モデルとして系は次のラグランジアン L で記述されるものとする。

$$L=\int_V d^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{m}{2}\dot{\phi}(\boldsymbol{x})^2-\frac{m}{2}\phi(\boldsymbol{x})\omega^2(-\nabla^2)\phi(\boldsymbol{x})\right\}-V^{\mathrm{I}}(\phi) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\equiv L_0+L^{\mathrm{I}}$$

ここで $\omega^2(-\nabla^2)$ はフーリエ成分 $\boldsymbol{k}$ で $\omega^2(\boldsymbol{k}^2)$ と書けば，分散関係を指定していることが判る。式(1)において系は体積 V の中で定義されているものとし $V^{\mathrm{I}}(\phi)=-L^{\mathrm{I}}$ は非調和的な相互作用を表わしている。ω と V^{I} は次の2つの条件を満たすものとする。これらはマクロ極限 $V\to\infty$ が存在する為に必要な条件である。

(i)　$\omega(\boldsymbol{k}^2)\equiv\omega_k$ は正で零にはならない。

(ii)　$V^{\mathrm{I}}(\phi)$ は短距離力である。　　$\cdots\cdots(2)$

(i)は励起スペクトルがギャップを持つということで，(ii)はもし $V^{\mathrm{I}}(\phi)$ を次の様に一般的に書いたとき，つまり

$$V^{\mathrm{I}}(\phi)=\sum_{n=3}^{\infty}v^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\phi(\boldsymbol{x}_1)\phi(\boldsymbol{x}_2)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n) \qquad \cdots\cdots(3)$$

の様な和で書いたとき $v^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_n)$ は，$\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$ の関数で，$|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| \to \infty$ で，$v^{(n)} \sim e^{-\rho|x_i - x_j|}$ $(\rho>0)$ の如く，充分速く零へ行くものとする。もちろん，局所的相互作用，例えば

$$V^{\mathrm{I}}(\phi) = \lambda \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \phi(\boldsymbol{x})^4$$

等は許される。フーリエ成分で(1)を書く。

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} (m \dot{\phi}_{\boldsymbol{k}}^{\sigma 2} - m \omega_{\boldsymbol{k}}^2 \phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma 2}) - V^{\mathrm{I}}(\phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}) \qquad \cdots\cdots (4)$$

ここで

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \phi_{\boldsymbol{k}}$$

$$\phi_{\boldsymbol{k}} = \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}}, \quad \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}} = \phi_{-\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}}, \quad \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}} = -\phi_{-\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}},$$

$$\phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma} \equiv (\phi_{\boldsymbol{k}}^1, \ \phi_{\boldsymbol{k}}^2) = (\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}}, \ \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}}),$$

と定義したが以下では $\phi_{\boldsymbol{k}}$ の実部 $\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}}$，虚部 $\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}}$ の $\boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}$ に対する対称性を用いて $\sum_{\boldsymbol{k}\sigma} = 2\sum_{\boldsymbol{k}\sigma}'$ なる記号を使う。ただし $\sum'$ は $\boldsymbol{k}$ 空間の適当に選ばれた半分の和を意味する。

Ⅱ．エネルギー固有状態の波動関数——はじめに自由場の場合

ハミルトニアンは $\pi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma} = 2m\dot{\phi}_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}$ と書いて次の様に与えられる。

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \dot{\phi}_{\boldsymbol{k}}^{\sigma} \delta L / \delta \dot{\phi}_{\boldsymbol{k}}^{\sigma} - L \equiv H_0 + H^{\mathrm{I}}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k},\sigma}' \left(\frac{1}{4m} \pi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma 2} + m \omega_{\boldsymbol{k}}^2 \phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma 2} \right) + V^{\mathrm{I}}(\phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}). \qquad \cdots\cdots (5)$$

ここで量子化する。演算子であることをハットで明記すると量子化条件は

$$[\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}, \ \hat{\phi}_{\boldsymbol{k}'}^{\sigma'}] = -\mathrm{i}\delta^{\sigma\sigma'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \qquad \cdots\cdots (6)$$

で与えられる。ハミルトニアンの固有状態の波動関数をまず自由場の場合に見てみよう。その為に q-表示にあたる ϕ- 表示をとる；

$$\hat{\phi}_k^\sigma|\phi> = \phi_k^\sigma|\phi>.$$

ここで $\phi\equiv\{\phi_k^\sigma\}$ は固有値のセット ϕ_k^σ を代表するものとする。H_0 は調和振動子の和であるからエネルギーの固有状態は零または正の整数 $m\equiv\{m_k^\sigma\}$ を用いて $|m>$ と書けてその波動関数は

$$<\phi|m> = <\{\phi_k^\sigma\}|\{m_k^\sigma\}>$$

$$= \prod_{k,\sigma}{}' N_{m_k^\sigma} H_{m_k^\sigma}(\sqrt{2m\omega_k}\,\phi_k^\sigma)\exp(-m\omega_k\phi_k^{\sigma 2}) \quad \cdots\cdots(7)$$

ここで $N_{m_k^\sigma}$ は規格化因子で $H_n(x)$ は n-次のエルミート多項式である。

エネルギーは $E_m = \sum_{k,\sigma}{}'\left(m_k^\sigma+\frac{1}{2}\right)\omega_k$ である。ここで

$$\sum_{k,\sigma}{}' m\omega_k\phi_k^{\sigma 2} = \frac{m}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\phi(\boldsymbol{x})\omega(-\nabla^2)\phi(\boldsymbol{x}) \quad \cdots\cdots(8)$$

$$= O(V)$$

に注意する。$O(V)$ とはオーダー V の示量変数であることを意味する。よって有限エネルギーの固有状態を表わす波動関数は

$$(\phi_{k_1}^{\sigma_1},\ \phi_{k_2}^{\sigma_2}\cdots\cdots\phi_{kn}^{\sigma n})\times \mathrm{e}^{F[\phi]},\qquad F[\phi]=O(V), \quad \cdots\cdots(9)$$

なる項の和で書かれることが判る。これを象徴的に

$$(\phi\text{ の多項式})\times \mathrm{e}^{F[\phi]}$$

と書いてもよいだろう。

示量変数

ここで $O(V)$ についてつまり示量変数の定義について述べる。

$$I \equiv \sum_n \int\cdots\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1\cdots \mathrm{d}\boldsymbol{x}_n\, G^{(n)}(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n)\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n)$$

を考えると，$G^{(n)}$ が $v^{(n)}$ について述べた性質を持つとき I は一般の示量変数という。$\boldsymbol{x}_1\sim$

x_nの積分のうち重心にあたる部分が全体積 V を出すからである。ある与えられた ϕ の汎関数 $I[\phi]$ が示量量か否かを見るには，$\phi(\boldsymbol{x})=\mathrm{const}\equiv\phi$ とおいて $I[\phi]$ に代入し全体に V が因子として現われれば $I[\phi]$ は示量変数である。

示強変数

示強変数には2種類ある[2)]。

クラスⅠ … これは示量変数を V で割ったもので局所的な情報は含まず，大域的な情報のみ含んでいる。以下ではこれを X と書き，マクロ変数と呼ぶ。

$$X=I[\phi]/V$$

マクロ変数は多くの自由度の平均として定義されるものであり例えば重心などがこれにあたる。最終的に測定される量はマクロ変数のみであることに注意したい。

クラスⅡ … もともとの局所的な変数 $\phi(\boldsymbol{x})$，$\pi(\boldsymbol{x})$ などを言う。局所的な情報を含み例えば

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\ \phi(\boldsymbol{x})C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y})$$

などもこれに属する。このクラスをミクロ変数と呼ぶが，ミクロ変数は，測定装置を用いて増巾しないかぎり直接観測できる変数ではない。

Ⅲ．相互作用があるときの波動関数

短距離相互作用が存在しても式(9)で与えられる結論は変わらないことを見るのがこの章の目的である。式が少し複雑になるが，簡単な議論で言える。まず Gell-Mann-Low 断熱定理[3)]から出発する。H_0 のエネルギー E^0_m の固有状態 $|m>$ を用意する。相互作用をゆっくりと $t=-\infty$ から $t=0$ まで加える；

$$H(t)=H_0+\mathrm{e}^{-\alpha|t|}H^{\mathrm{I}}$$

最後に $\alpha\to0$ とする。このとき $|m>$ はつねに $H(t)$ の固有状態に滞っている。具体的には $|m\gg$ を

$$|m\gg=\lim_{\alpha\to0}\frac{U_\alpha(0,-\infty)|m>}{<m|U_\alpha(0,-\infty)|m>} \qquad \cdots\cdots(10)$$

で定義すると $H = H_0 + H^{\mathrm{I}}$ については

$$H|m\gg = E|m\gg, \quad E = E_m^0 + \Delta E \qquad \cdots\cdots (11)$$

が成立する。ここで U_α は相互作用表示での時間発展演算子で

$$U_\alpha(t,t') = \exp(iH_0t')\mathrm{T}\exp\left(-i\int_t^{t'}\mathrm{d}t''H(t'')\right)\exp(-iH_0t) \qquad \cdots\cdots (12)$$

で定義される。ここで $|m\gg$ の波動関数 $<\phi|m\gg$ を見る。その為には式(10)の分子のみで充分である。分母は ϕ に依らない無限大の因子を打ち消すのに必要な因子である。以下 $t'=0$ として有限の t, α で議論する。

$$\begin{aligned}<\phi|m\gg &\cong <\phi|U_\alpha(0,t)|m> \\ &= \int[\mathrm{d}\phi']<\phi|\mathrm{T}\exp\left(-i\int_t^0\mathrm{d}t''H(t'')\right)|\phi'><\phi'|m>\mathrm{e}^{-iE_m^0t} \qquad \cdots\cdots (13) \\ &\equiv K\mathrm{e}^{-iE_m^0t}\end{aligned}$$

とおいて K の形を見ていく。さて公式

$$\mathrm{e}^{-S^2+2S\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\xi)}{n!}S^n$$

を用いて

$$\begin{aligned}<\phi'|m> &= \prod_{k\sigma}N_{m_k^\sigma}H_{m_k^\sigma}(\sqrt{2m\omega_k}\phi'^\sigma_k)\exp(-m\omega_k\phi'^{\sigma 2}_k) \\ &= \prod_{k\sigma}N_{m_k^\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S_k^\sigma}\right)^{m_k^\sigma}\exp\left(-S_k^{\sigma 2}+2S_k^\sigma\phi'^\sigma_k\sqrt{2m\omega_k}-m\omega_k\phi'^{\sigma 2}_k\right)\Bigg|_{S=0} \qquad \cdots\cdots (14)\end{aligned}$$

を K に代入する。

$$\begin{aligned}K = \prod_{k,\sigma}N_{m_k^\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S_k^\sigma}\right)^{m_k^\sigma}\int[\mathrm{d}\phi']<\phi|\exp\left(-i\int_t^0H(t'')\mathrm{d}t''\right)|\phi'> \\ \times\exp(-S_k^{\sigma 2}+2S_k^\sigma\phi^\sigma{}_k\sqrt{2m\omega_k}-m\omega_k\phi'^{\sigma 2}_k)|_{S=0}. \qquad \cdots\cdots (15)\end{aligned}$$

ここで次の径路積分の公式を用いる

$$K_1 \equiv <\phi|\exp\left(-\mathrm{i}\int_t^0 H(t'')\mathrm{d}t''\right)|\phi'>$$

$$= \int_{\mathrm{B}}[\mathrm{d}\tilde{\phi}]\exp\left(\mathrm{i}\int_t^0 \mathrm{d}t'' L(\tilde{\phi}_k^\sigma(t''))\right). \qquad \cdots\cdots (16)$$

ここで $\int_{\mathrm{B}}[\mathrm{d}\tilde{\phi}]$ は $\tilde{\phi}(0)=\phi'$, $\tilde{\phi}(t)=\phi$ を境界条件とする（径路）汎関数積分である。$L=L_0-V^{\mathrm{I}}(\phi)$ と書き式(16)の右から恒等式

$$1 = \exp\mathrm{i}\int \mathrm{d}t'' \sum_{k,\sigma} J_k^\sigma(t'')\tilde{\phi}_k^\sigma(t'')\Big|_{J=0}$$

を掛ける。その結果

$$K_1 = \exp\left\{-\mathrm{i}\int_t^0 \mathrm{d}t'' V^{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_k^\sigma(t'')}\right)\right\}$$

$$\times \int_{\mathrm{B}}[\mathrm{d}\tilde{\phi}]\exp\left\{-i\int_t^0 \mathrm{d}t''(L_0(\tilde{\phi}_k^\sigma(t''))-\sum_{k\sigma}J_k^\sigma(t'')\tilde{\phi}_k^\sigma(t''))\right\}\Big|_{J=0}$$

$$\equiv \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}t'' V^{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_k^\sigma(t'')}\right)\right\} K_0(\phi, \phi', t, J)\Big|_{J=0}. \qquad \cdots\cdots (17)$$

さらにもう一度 K_0 のすぐ後へ

$$1 = \exp\mathrm{i}\int_t^0 \mathrm{d}t'' \sum_{k,\sigma} J_k^\sigma(t'')\tilde{\phi}_k^\sigma(t'')\Big|_{\tilde{\phi}=0}$$

を挿入して

$$K_1 = K_0\left(\phi_k^\sigma, \phi_k'^\sigma, t, \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}_k^\sigma(t)}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}t'' V^{\mathrm{I}}\left(\tilde{\phi}_k^\sigma(t'')\right)\right\}\Big|_{\tilde{\phi}=0} \qquad \cdots\cdots (18)$$

を得る。K_0 は調和振動子に線形外力が働いているときの積分核で結果はよく知られている[4]。 $T=t'-t=-t$ とおいて次の様である。

$$K_0 = \prod_{k,\sigma}\sqrt{\frac{m\omega_k}{i\pi\sin\omega_k T}}\exp iS, \qquad \cdots\cdots (19)$$

$$S = \sum_{k,\sigma}\left\{m\omega_k\frac{\cos\omega_k T}{\sin\omega_k T}(\phi_k^{\sigma 2}+\phi_k'^{\sigma 2}) - \frac{2m\omega_k}{\sin\omega_k T}\phi_k^\sigma\phi_k'^\sigma\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^0 ds\int_t^0 ds' \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}_k^\sigma(s)}G_k(s,s')\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}_k^\sigma(s')} \qquad \cdots\cdots(20)$$

$$-\phi_k^\sigma\int_t^0 ds\frac{\sin\omega_k(s-t)}{\sin\omega_k T}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}_k^\sigma(s)}+\phi_k'^\sigma\int_t^0 ds\frac{\sin\omega_k s}{\sin\omega_k T}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}_k^\sigma(s)}\Big\},$$

$$G_k(s,s')=\frac{-1}{2m\omega_k\sin\omega_k T}\Big\{\theta(s-s')\sin\omega_k(s'-t)\sin\omega_k s+(s\leftrightarrow s')\Big\}. \qquad \cdots\cdots(21)$$

ここで $\int[d\phi']$ を実行して K を求める。これは Gauss 積分である。結果は次の式で $\tilde{\phi}_k^\sigma=S_k^\sigma=0$ と置いたものである：

$$K=\Big(\frac{d}{dS_k^\sigma}\Big)^{m_k^\sigma}\prod_{k,\sigma}N_{m_k^\sigma}\exp\Big(-\frac{i}{2}\omega_k T-e^{-2i\omega_k T}S_k^{\sigma 2}+2\sqrt{2m\omega_k}\,e^{-i\omega_k T}S_k^\sigma\phi_k^\sigma\Big)$$

$$\times\exp(i\tilde{S})\exp\Big\{-i\int_t^0 dt'' V^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\phi}(t'')\Big)\Big\}, \qquad \cdots\cdots(22)$$

$$\tilde{S}\equiv\frac{1}{2}\int_t^0 ds\int_t^0 ds'\frac{\partial}{i\partial\tilde{\phi}_k^\sigma(s)}\bar{G}_k(s,s')\frac{\partial}{i\partial\tilde{\phi}_k^\sigma(s')}$$

$$+\int_t^0 ds\Big\{\phi_k^\sigma(s)e^{i\omega_k s}-i\sqrt{\frac{2}{m\omega_k}}S_k^\sigma\sin\omega_k s e^{-i\omega_k T}\Big\}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}_k^\sigma(s)}, \qquad \cdots\cdots(23)$$

$$\bar{G}_k(s,s')=\frac{-1}{4m\omega_k}\Big\{\theta(s'-s)\sin\omega_k s' e^{i\omega_k s}+(s\leftrightarrow s')\Big\}. \qquad \cdots\cdots(24)$$

ここで $\tilde{S}$ の中の $\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}}\bar{G}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}}$ の項は T-積を N-積の和に書き直す Wick の定理を実現するオペレーターであることに注意すると，

$$\exp\Big(\frac{i}{2}\int ds\int ds'\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}}\bar{G}\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}}\Big)\exp\Big(-i\int dt'' V^{\mathrm{I}}\Big)$$

$$=\exp\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1\sigma_1}\int ds_1\sum_{k_2\sigma_2}\int ds_2\cdots\sum_{k_n\sigma_n}\int ds_n$$

$$\times G_{\sigma_1\cdots\sigma_n}^{(n,C)}(\boldsymbol{k}_1 s_1,\boldsymbol{k}_2 s_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n s_n)\tilde{\phi}_{k_1}^{\sigma_1}(s_1)\cdots\tilde{\phi}_{k_n}^{\sigma_n}(s_n)\Big\} \qquad \cdots\cdots(25)$$

と書けることが判る。ここで $G^{(n,C)}$ とは n 点グリーン関数で外線の（裸の）プロパゲーターを切り，全体が結合した（connected）部分のみを取ったものである。$\tilde{S}$ の中で残された操作は，公式

$$e^{a\frac{\partial}{\partial\phi}}f(\phi)\Big|_{\phi=0}=f(a)$$

を用いると式(25)で置き換え

$$\tilde{\phi}_k^\sigma(s) \to \phi_k^\sigma(s)e^{i\omega_k s} - i\sqrt{\frac{2}{m\omega_k}}\, S_k^\sigma \sin\omega_k s e^{-i\omega_k T} \qquad \cdots\cdots (26)$$

を実行することを意味している。さらに $\left(\frac{d}{dS_k^\sigma}\right)$ を作用させると exp の肩から ϕ に依存する次の因子が降りてくることが判る。

$$-2e^{-2i\omega_k T}S_k^\sigma + 2\sqrt{2m\omega_k}e^{-i\omega_k T}\phi_k^\sigma$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_2\sigma_2}\int ds_2 \cdots G_{\sigma\sigma_2}^{(n,C)}\cdots{}_{\sigma_n}(\boldsymbol{k}s_1, \boldsymbol{k}_2 s_2, \cdots)\phi_{k_2}^{\sigma_2}\cdots\phi_{k_n}^{\sigma_n}e^{i(\omega_k s_1+\cdots)} \qquad \cdots\cdots (27)$$

$$\equiv f_k^\sigma(S_k^\sigma)$$

一方 exp の肩は $S_k^\sigma = 0$ と置くと

$$\exp\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1\sigma_1}\int ds_1 \cdots G_{\sigma_1\cdots\sigma_n}^{(n,C)}(\boldsymbol{k}_1 s_1 \cdots \boldsymbol{k}_n s_n)\phi_{k_1}^{\sigma_1}(s_1)\cdots\phi_{k_n}^{\sigma_n}(s_n)e^{i(\omega_k s_1+\cdots)}$$

$$\equiv \exp\sum_{n=0}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{x}_1 \cdots \int d^3\boldsymbol{x}_n C^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n)\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n) \qquad \cdots\cdots (28)$$

と書けることが判る。ここで ω_k と $V^1(\phi)$ に対する条件から $C^{(n)}(\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n)$ は $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$ の関数で $|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| \to \infty$ で充分速く零へ行くことが判る。

こうして相互作用がある場合も

$$K = f_{k_1}^{\sigma_1} f_{k_2}^{\sigma_2} \cdots f_{k_n}^{\sigma_n} e^{F[\phi]}, \qquad F[\phi] = O(V). \qquad \cdots\cdots (29)$$

の形をしていることが判る。f_k^σ は式(27)の $f_k^\sigma(S_k^\sigma = 0)$ であって本質的には

$$f_k^\sigma = \phi_k^\sigma + \sum D_{\sigma\sigma_1}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1)\,\phi_{k_1}^{\sigma_1} + \sum D_{\sigma\sigma_1\sigma_2}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)\phi_{k_1}^{\sigma_1}\phi_{k_2}^{\sigma_2} + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots (30)$$

の形をしており $V \to \infty$ での振舞いは ϕ_k^σ と同じであり有限であるとしてよい。結局

$$<\phi|m\gg = f_{k_1}^{\sigma_1}\cdots f_{k_n}^{\sigma_n}e^{F[\phi]}; \quad F[\phi]\text{ は示量変数} \qquad \cdots\cdots (30)$$

という結論を得る。式(30)はフーリエ変換すると見やすい。

$$f(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \int D(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\phi(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'$$

$$+\int\int D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')\phi(\boldsymbol{x}')\phi(\boldsymbol{x}'')\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'' + \qquad \cdots\cdots (31)$$

これはクラスⅡの示強変数（ミクロ変数）である。V のオーダーとしては $f(\boldsymbol{x}) \to O(1)$ $(V \to \infty)$ と書くことにする。そうすると有限の励起エネルギーの状態は $V \to \infty$ で

$$<\phi|m\gg = \mathrm{e}^{O(V)} \times O(1) \quad (V \to \infty) \qquad \cdots\cdots (32)$$

と書いてよい。一般に

$$<\phi|m\gg = \mathrm{e}^{F[\phi]+\Delta F[\phi]} \qquad \cdots\cdots (33)$$

と書いたとき，$\Delta F[\phi] = O(V)$（示量変数）のときはじめてマクロな励起状態の波動関数を表わすことになる。これをマクロな励起と呼ぶ。

マクロに異なる励起状態はマクロ極限(V→∞)では異なるヒルベルト空間に属する

このことを見るのが次の章の目的である。上の結果から言えば

$$f(\boldsymbol{x}_1)f(\boldsymbol{x}_2)\cdots f(\boldsymbol{x}_n)\mathrm{e}^{F[\phi]} \qquad \cdots\cdots (34)$$

をすべて集めれば1つのヒルベルト空間を作り $F+\Delta F$ で $\Delta F = O(V)$ となるものは式(34)の形ではつくれないということである。

Ⅳ．マクロ極限でのヒルベルト空間の分解

まず基底状態のノルムを考えてみる。$|m\gg = |0\gg$ として

$$I^{(0)} \equiv \int[\mathrm{d}\phi] <\phi|0\gg^2 = \int[\mathrm{d}\phi]\mathrm{e}^{2F[\phi]} = 1$$

ここで第Ⅱ章のマクロ変数 $X[\phi]$ をある値 X に止めて考えてみる：

$$I^{(0)} = \int[\mathrm{d}\phi]\int\mathrm{d}X\delta(X-X[\phi])\mathrm{e}^{2F[\phi]}$$

$$= \frac{V}{2\pi}\int[\mathrm{d}\phi]\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}J\int\mathrm{d}X\exp(2F[\phi]-VJX[\phi]+VJX).$$

ここで $2F[\phi]-VJX[\phi]$ をラグランジアンの時間積分（作用）と考えこのうち ϕ の2次をもとにして3次以上を相互作用と考えれば今までにやったのと同じ方法で $\int[\mathrm{d}\phi]$ が実行できて結果は $\exp G$ となり $G=-VW(J)$（示量変数）と書けるはずである。よって

$$I=\frac{V}{2\pi}\int\mathrm{d}J\int\mathrm{d}X\,\exp\{-VW(J)+VJX\}$$

ここで規格化条件より $W(0)=0$ であることに注意する。$V\to\infty$ で J 積分の停留のみが効く。よってその点 $J=J^0(\mathrm{X})$ を

$$-W'(J)+X=0$$

の解として定義し次の様に展開する。

$$W(J)-JX=W(J^0(X))-J^0(X)X+\frac{1}{2}W''(J^0(X))(J-J^0)^2+\cdots\cdots.$$

その結果

$$I=\frac{V}{2\pi}\int\mathrm{d}X\,\exp\{-V(W(J^0(X))-J^0(X)X\}\sqrt{\frac{2\pi}{-VW''(J^0(X))}}$$

を得るが残りの $\int\mathrm{d}X$ もやはり停留が効く。W のルジャンドル変換

$$\Gamma(X)\equiv W(J^0(X))-J^0(X)X \qquad \cdots\cdots \quad (35)$$

は X に対する有効作用（effective action）と呼ばれる。X の停留 X_0 は

$$\Gamma'(X)=-J^0(X)=0$$

で求まるので $\Gamma(X)=\Gamma(X_0)+\frac{1}{2}\Gamma''(X_0)(X-X_0)^2+\cdots$ と展開すると

$$I^{(0)}=\frac{V}{2\pi}\int\mathrm{d}X\sqrt{\frac{2\pi}{-VW''(J^0)}}\exp\left\{-V(\Gamma(X_0)+\frac{1}{2}\Gamma''(X_0)(X-X_0)^2)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi}\int \mathrm{d}X \sqrt{\frac{2\pi}{-VW''(J^0)}}\sqrt{\frac{V\Gamma''(X_0)}{2\pi}}^{-1}\delta(X-X_0)\mathrm{e}^{-V\Gamma(X_0)}$$

$$= \int \mathrm{d}X\delta(X-X_0). \qquad \cdots\cdots (36)$$

ここで $\Gamma(X_0)=W(J=0)=0$ とルジャンドル変換の定義からくる $W''(J^0)\Gamma''(X^0)=-1$ を用いた。式(36)は $X=X_0$ のみが効いていることを示し基底状態では $X[\phi]$ が X_0 に固定されている（揺らぎがない）ことを示している。実は式(36)を得るとき X-積分はしていないのでもっと広い式

$$\int[\mathrm{d}\phi]\delta(X-X[\phi]) < \phi|0\gg^2 = \delta(X-X_0)$$

が成立する。

次にもっと一般的な式

$$I^{(n)} \equiv \int[\mathrm{d}\phi] < \phi|0\gg^2 \phi(\boldsymbol{x}_1)\phi(\boldsymbol{x}_2)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n)$$

を考える。やはり $1=\int \mathrm{d}X\delta(X-X[\phi])$ を挿入して

$$I^{(n)} = \int \mathrm{d}X\int \mathrm{d}J\,(\exp\,VJX)\,M\,(J)$$

$$\times\left\{\int[\mathrm{d}\phi]\exp\left(2F[\phi]-VJX[\phi]\right)(\boldsymbol{x}_1)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n)/M(J)\right\} \qquad \cdots\cdots (37)$$

$$= \int \mathrm{d}X\int \mathrm{d}J(\exp\,VJX)M(J)\times H_n(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n\,;J). \qquad \cdots\cdots (38)$$

ここで

$$M(J) = \int[\mathrm{d}\phi]\exp\left(2F[\phi]-VJX[\phi]\right)$$

を定義した。$H_n(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n\,;J)$ は式(37)の $\{\cdots\}$ の中の量で定義され $2F[\phi]-VJX[\phi]$ なる作用で与えられる理論での n 点グリーン関数で（真空タイプのグラフを除いたもの）ミクロな量であり $V\to\infty$ で有限である。結局 $V\to\infty$ で

$$I^{(n)} = \int \mathrm{d}X\mathrm{d}J\,\exp\{VJX-VW(J)\}\,H_n\,(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n : J)$$

$$\cong \int \mathrm{d}X\delta\,(X-X_0)\,H_n(\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n : J^0(X)) \qquad \cdots\cdots (39)$$

となり X_0 は真空での X_0 と同じものであり，$X[\phi]$ は X_0 以外の値をとらないことが判る。一般に X-積分をしなくてもこのことが成立するのは $I^{(0)}$ の場合と同じである。もっと一般に

$$I^{(n,l)} = \int [\mathrm{d}\phi] < \phi|0\gg^2 \phi(\boldsymbol{x}_1) \cdots \phi(\boldsymbol{x}_n)\,\Pi(\boldsymbol{x}_{n+1}) \cdots \Pi(\boldsymbol{x}_{n+l}) \qquad \cdots\cdots (40)$$

としても同じことが言える。ここで $\Pi(\boldsymbol{x})$ は共役運動量である。式(40)ですべての n，l をとれば１つのヒルベルト空間をつくるので

１つのヒルベルト空間ではマクロ変数は１つの揺らぎのない数（c-number）をとる。

ここで c-number はオペレーターでは値を変化できることに注意しよう。このことを逆に言えば

マクロ変数の異なる値には異なるヒルベルト空間が対応する。

各々のヒルベルト空間はミクロ変数がつくることになる。ミクロ変数はマクロな極限でも揺らいでいる。つまり，オペレーターなのである。

有限の励起エネルギーを持った励起状態の正しい波動関数(34)を用いても上と同じ結論が得られることは，ここでは示さないが，すぐに示せることである。以上を別の言葉で言うと

波動関数のexpの肩がオーダー V で異なれば別のヒルベルト空間，
そうでなければ同じヒルベルト空間

ということである。

次に $X[\phi]$ の値の異なる状態間の行列要素をみることにする。２つの波動関数 $<\phi|\psi>_{X_1}$，$<\phi|\psi>_{X_2}$ をとる。ここで X_1 と X_2 は $X[\phi]$ の異なる値を意味し $|\psi>_{X_1}$ $|\psi>_{X_2}$ はそれぞれそのような $X[\phi]$ の値を与える状態である。$<\phi|\psi>_i = \mathrm{e}^{F_i[\phi]} (i=1,2)$ と書く。$X[\phi]$ を X に固定して内積をつくる。

$$\int [\mathrm{d}\phi]\delta(X[\phi]-X)_{X_1} < \psi|\phi> < \phi|\psi>_{X_2}$$

$$= \int [\mathrm{d}\phi]\delta(X[\phi]-X)\mathrm{e}^{F_1[\phi]+F_2[\phi]}$$

$$\leq \left\{ \int [\mathrm{d}\phi]\delta(X[\phi]-X)\mathrm{e}^{2F_1[\phi]} \int [\mathrm{d}\phi]\delta(X[\phi]-X)\mathrm{e}^{2F_2[\phi]} \right\}^{1/2}$$

$$\underset{V\to\infty}{\longrightarrow} \{\delta(X-X_1)\delta(X-X_2)\}^{1/2}. \qquad \cdots\cdots (41)$$

$X_1 \neq X_2$ではこれは零である（不等式が現れたのはSchwarzの不等式を用いたため）。もっと一般に

$$\int [\mathrm{d}\phi]_{X_1} <\psi|\phi>\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots \Pi(\boldsymbol{x}_{n+1})\cdots <\phi|\psi>_{X_2} \qquad \cdots\cdots (42)$$

を考えても積分がexpの肩のオーダーVの量で決まる停留のみで与えられるのでこの量も$V\to\infty$では(41)の因子と同じものに比例しやはり零となることが判る。

ϕ, Πのすべての多項式の，マクロに異る状態間の行列要素はマクロ極限では零である

V．いくつかの議論

(i) 拡張　以上のことは，Vを全体積にとらなくても成り立つ。例えばvを全体積のk倍，$v=kV$ $(k<1)$として$V\to\infty$とすればvで定義されたマクロ変数

$$X_v[\phi] = \frac{1}{v}\int_v \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_1 \cdots \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_n g(\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n)\,\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n)$$

はc-numberとなる。これはlocalなマクロ量を定義する。例えばvを$\boldsymbol{x}_0$を中心にしたマクロな体積とすれば$p(\boldsymbol{x}_0)$（局所圧力），$T(\boldsymbol{x}_0)$（局所温度），$\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$（局所エネルギー密度），$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_0)$（局所磁化密度）等である。

(ii) マクロ変数の値はそこに属する状態ベクトルのミクロな詳細には依らない。いまマクロ変数$X[\phi]$の値X_1に属するベクトルを

$$|\psi>_{X_1} = \sum_n C_n |n>_{X_1}$$

とおく。nはX_1は与えるがミクロには異なる状態の１つを意味する。さて

$$_{X_1}\langle\psi|X[\phi]|\psi\rangle_{X_1}=\sum_{n,n'}C_n^*C_n\ {}_{X_1}\langle n'|X[\phi]|n\rangle_{X_1} \qquad \cdots\cdots (42)$$

$$=\sum_n|C_n|^2X_0 \qquad \cdots\cdots (43)$$

$$=X_0$$

ここで $X[\phi]$ は c-number ゆえ $\langle n'|X[\phi]|n\rangle\propto\delta_{nn'}$ を用いた。

(iii) マクロ変数を測定する限り mixed state である。このことは上の(43)を見れば明らかである。

(iv) 時間発展　ここではくわしく述べないがマクロ変数 $X[\phi]$ の運動を決める方程式は double path effective action[5] とよばれる(35)を拡張した $\Gamma[X_1, X_2]$ を用いると便利である。運動方程式は

$$\left.\frac{\delta\Gamma[X_1, X_2]}{\delta X_1(t)}\right|_{X_1=X_2=X}=0 \qquad \cdots\cdots (46)$$

であり，解 $X(t)$ が $X[\phi]$ の揺らぎのない値を各 t で与えるのである。式(46)の具体的な応用は現在進行中である。

引　用　文　献

1） 観測問題との関連については著者の論文，素粒子論研究78巻3号（1988年12月号）70ページをご覧下さい。
2） R. Fukuda, Phys Rev. **A35**, 8(1987); **A36**, 3023(1987)
3） M. Gell-Mann and F. E. Low, Phys. Rev. **84**, 350(1951)
4） R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367(1948)
5） A. J. Niemi and G. W. Semenoff, Ann. of Phys. **152**, 105(1984)
R. Fukuda, Prog. Theor. Phys. **77**, 825(1987); **77**, 845(1987).