物性研究 55−6(1991−3)

ヤン・ミルズ・ヒッグス系における分岐について

早大理工　荒井義則

(1991年1月7日受理)

§1　序　論

1970年代の終わり頃から，ヤン・ミルズ場における分岐［1］−［6］やカオス［7］−［10］について，いろいろな研究がなされてきた。

ヤン・ミルズ場は，主として，素粒子物理学において重要な役割りを果たしているが，分岐やカオスを示すモデルとして，非線形数学の研究対象としても興味深い。

カオスに関しては，ヤン・ミルズ・ヒッグス系についてもいろいろと調べられており［11］−［13］，ヤン・ミルズ場同様，非線形数学の研究対象として興味深いものであるが，ヤン・ミルズ場とは異なり，分岐についてはあまり研究されていない。

本稿では，ヤン・ミルズ・ヒッグス系における分岐について調べる。ヤン・ミルズ場における分岐の研究は重要な結果をもたらしているものも少なくないので，ヤン・ミルズ・ヒッグス系における分岐を研究することも無意味なことではないであろう。

§2　ヤン・ミルズ・ヒッグス系

本稿で扱うモデルのラグランジアン密度は次式で与えられる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D_{\mu}\phi^{a}D^{\mu}\phi^{a} - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi^{a}\phi^{a} - \frac{m^2}{\lambda}\right)^{2}, \tag{1}$$

ただし，

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} + g\varepsilon^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}, \tag{2}$$

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c , \tag{3}$$

$$(a, b, c = 1, 2, 3)$$

である。

ここで，

$$A_0^a = 0, \quad A_i^a = \varepsilon_{aij} B^j (t) , \tag{4}$$

$$\phi^a = \sqrt{2}\, \eta^a (t) , \tag{5}$$

$$B^1(t) = B^2(t) = B^3(t) = q_1(t) , \tag{6}$$

$$\eta^1(t) = \eta^2(t) = \eta^3(t) = q_2(t) , \tag{7}$$

とおくと，場の方程式は

$$\ddot{q}_1 + 6g^2 q_1 q_2^2 + 3g^2 q_1^3 = 0 , \tag{8}$$

$$\ddot{q}_2 - m^2 q_2 + 6g^2 q_2 q_1^2 + 6\lambda q_2^3 = 0 , \tag{9}$$

となる。方程式(8)，(9)において，「・」は t に関する微分を表わす。

C. N. KumarとA. Khareは，パンレブの方法によって方程式(8)，(9)を解析したが［13］，本稿では方程式(8)，(9)において解の分岐が生じることを，単純固有値からの分岐に関する定理（文献［14］，188頁，定理5. 1）を用いて示す。

§3　解の分岐

以下では，$m^2 < 0$ の場合，すなわち，自発的に対称性が破れている場合を考える。

$$\alpha = -m^2 > 0 , \tag{10}$$

とおいて，

$$q_1(t)=\alpha f(t)\ ,\ q_2(t)=\alpha h(t)\ , \tag{11}$$

とおくと，方程式(8)，(9)は

$$\ddot{f}+6g^2\alpha^2fh^2+3g^2\alpha^2f^3=0\ , \tag{12}$$

$$\ddot{h}+\alpha h+6g^2\alpha^2hf^2+6\lambda\alpha^2h^3=0, \tag{13}$$

となる。

ここでは

$$0\leqq t\leqq T\ ,\ (T\text{は任意の正数}) \tag{14}$$

の範囲で考えることにする。このとき，$\alpha=-m^2$ を分岐のパラメーターにとると，次の定理が成立する。

（定理）方程式(12)，(13)には

$$\alpha=-m^2=\frac{n^2\pi^2}{T^2}\ ,\qquad (\text{ただし，}n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{15}$$

のとき自明解 $f=0$，$h=0$ から分岐し，境界条件

$$f(0)=f(T)=h(0)=h(T)=0, \tag{16}$$

を満たす非自明解が存在する。α が $n^2\pi^2/T^2$ に十分近いとき，この分岐解は

$$f=O(u^2)\ , \tag{17}$$

$$h=u\sin\frac{n\pi}{T}t+O(u^2)\ , \tag{18}$$

と表わされる。ここで，u は0に十分近い実数で，αとは

$$\alpha = \frac{n^2 \pi^2}{T^2} + O(|u|), \tag{19}$$

の関係がある。また，（α，f，h）が（$n^2\pi^2/T^2$，0，0）に十分近いところでは，方程式(12)，(13)の解は自明解　$f=0$，$h=0$と(17)，(18)で表わされる解のみである。

（証明）証明は前の論文［15］と全く同じようにしてできる。

方程式(12)，(13)の非線系部分

$$\begin{pmatrix} 6g^2\alpha^2 fh^2 + 3g^2\alpha^2 f^3 \\ 6g^2\alpha^2 hf^2 + 6\lambda\alpha^2 h^3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

とこの非線形部分のfとhに関する一次導関数が，　$f=h=0$　のときに0になることは容易にわかる。

線形部分の固有値問題については，境界条件(16)のもとで次の方程式を考えればよい。

$$\begin{pmatrix} \ddot{f} \\ \ddot{h} + \alpha h \end{pmatrix} = 0。 \tag{21}$$

この方程式は　$\alpha = n^2\pi^2/T^2$　のとき，次式で示される唯一の非自明解を持つ。

$$\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \dfrac{n\pi}{T} t \end{pmatrix}。 \tag{22}$$

すなわち，$n^2\pi^2/T^2$ が単純固有値で，この固有値に(22)なる固有ベクトルが属することがわかった。

以上の考察より，単純固有値からの分岐に関する定理（文献［14］，188頁，定理5.1)によって，本定理は証明されたことになる。

§4　最後に

本稿では，$-m^2$をパラメーターにとり，$m^2<0$，すなわち，自発的に対称性が破れている場合には，分岐が生じることを示した。

前の論文［15］では，非線形シュレーディンガー方程式にも解の分岐が生じることを，本稿と全く同じ証明方法で証明した。また，文献［5］では，ヤン・ミルズ場にも分岐が生じることが本稿と同じ証明法によって示されている。

ヤン・ミルズ場，ヤン・ミルズ・ヒッグス系，非線形シュレーディンガー方程式において，同じような形で分岐が生じるということは，偶然とはいえ，おもしろいことである。

参考文献

［1］R.Jackiw and P.Rossi : Phys.Rev.**D21** (1980) 426.

［2］C.H.Oh : J.Math.Phys.**25**(1984) 660.

［3］S.K.Paul and A.Khare : Phys.Lett.**138B**(1984) 402.

［4］C.H.Oh, S.N.Chow and C.H.Lai : Phys.Rev.**D30** (1984) 1334.

［5］U.Kursawe and E.Malec : J.Math.Phys.**26**(1985) 2643.

［6］C.H.Oh and R.R.Parwani : J.Phys.**A23** (1990) L871.（この論文のReferencesも参照）.

［7］S.G.Matinyan, G.K.Savvidy and N.G.Ter-Arutunyan-Savvidy : Sov.Phys.JETP **53** (1981) 421.

［8］W.-H.Steeb, J.A.Louw and C.M.Villet : Phys.Rev. **D33** (1986) 1174.

［9］S.G.Matinyan, E.B.Prokhorenko and G.K.Savvidi : JETP Lett.**44**(1986) 138.

［10］T.Kawabe and S.Ohta : Phys.Rev.**D41**(1990) 1983.

［11］S.G.Matinyan, G.K.Savvidy and N.G.Ter-Arutunyan-Savvidy : JETP Lett.**34**(1981) 590.

［12］M.P.Joy and M.Sabir : J.Phys.**A22** (1989) 5153.

［13］C.N.Kumar and A.Khare : J.Phys.**A22**(1989) L849.

［14］S.N.Chow and J.K.Hale : *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1982).

［15］Y.Arai : 非線型シュレーディンガー方程式の解の分岐について（「物性研究」本号前掲論文）