Title	非線形シュレーディンガー方程式の解の分岐について
Author(s)	荒井, 義則
Citation	物性研究 (1991), 55(6): 649-653
Issue Date	1991-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94482
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

物性研究　55－6(1991－3)

非線形シュレーディンガー方程式の解の分岐について

早大理工　荒井義則

(1990年12月28日受理)

§1　序　　論

非線形方程式が示す性質のひとつに解の分岐というものがある。分岐は物理のいろいろな分野に見られ，重要な役割りを果たしているものも少なくない［1］－［3］。

ここでは，最近 Florjanczykと Tremblay によって周期解が求められた連立非線形シュレーディンガー方程式において［4］，解の分岐が生じることを示す。

§2　方 程 式

ここで扱う方程式は

$$\mathrm{i}\,a_t + a_{xx} + \kappa a + p\,(|a|^2 + |b|^2)\,a + q\,(a^2 + b^2)\,a^* = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{i}\,b_t + b_{xx} - \kappa b + p\,(|a|^2 + |b|^2)\,b + q\,(a^2 + b^2)\,b^* = 0, \tag{2}$$

である。方程式(1)，(2)において，a と b は x と t の関数であり，κ，p，q はそれぞれ

$$\kappa = \frac{2\alpha}{3}, \quad p = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{1}{3}, \tag{3}$$

あるいは

$$\kappa = 2\alpha, \quad p = 2, \quad q = -1, \tag{4}$$

である。ここで α は

$$\alpha \geqq 0, \tag{5}$$

を満たす定数である。

方程式(1)，(2)は

$$a(x,t)=\kappa f(x)\exp\left(\frac{1}{2}\kappa it\right), \tag{6}$$

$$b(x,t)=\kappa h(x)\exp\left(\frac{1}{2}\kappa it\right), \tag{7}$$

とおくと，

$$f''+\frac{1}{2}\kappa f+\kappa^2 f^3+\kappa^2 f h^2=0, \tag{8}$$

$$h''-\frac{3}{2}\kappa h+\kappa^2 h^3+\kappa^2 f^2 h=0, \tag{9}$$

となる。ここで，f と h は x のみの関数であり，方程式(8)，(9)における「 ′ 」は x に関する微分を表わすものとする。

文献［4］においては，Florjanczykと Tremblayは，方程式(1)，(2)の周期解を求めたが，ここでは方程式(8)，(9)において解の分岐が生じることを，単純固有値からの分岐に関する定理（文献［5］，188頁，定理5.1）を用いて証明する。

§3　証　明

この節では，

$$0\leqq x\leqq 1, \tag{10}$$

の範囲を考えて，

$$f(0)=f(1)=h(0)=h(1)=0, \tag{11}$$

なる境界条件を満たし，自明解

$$f=0,\ h=0, \tag{12}$$

から分岐する非自明解を方程式(8)，(9)が持つことを証明する。証明すべきことを定理の形にまとめておく。

（定理）方程式(8)，(9)は

$$\kappa = 2n^2\pi^2 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots), \tag{13}$$

のとき自明解(12)から分岐し，境界条件(11)を満たす非自明解を持つ。この分岐解は κ が $2n^2\pi^2$ に十分近いとき，

$$f = u \sin n\pi x + 0(u^2), \tag{14}$$

$$h = 0(u^2), \tag{15}$$

と表わされる。u は 0 に十分近い実数で，κ との関係は

$$\frac{1}{2}\kappa = n^2\pi^2 + 0(|u|), \tag{16}$$

で示される。また，$(\kappa,\ f,\ h)$ が $(2n^2\pi^2,\ 0,\ 0)$ に十分近いところでは，方程式(8)，(9)の解は自明解(12)と(14)，(15)で表わされる解のみである。

（証明）方程式(8)，(9)の非線形部分

$$\begin{pmatrix} \kappa^2 f^3 + \kappa^2 f h^2 \\ \kappa^2 h^3 + \kappa^2 f^2 h \end{pmatrix} \tag{17}$$

に着目すると，この部分の f と h に関する1次導関数は，

$$f = h = 0, \tag{18}$$

のとき 0 になることが容易にわかる。

次に，線形部分の固有値問題を考える。そのために

$$\begin{pmatrix} f'' + \dfrac{1}{2}\kappa f \\ h'' - \dfrac{3}{2}\kappa h \end{pmatrix} = 0, \tag{19}$$

なる方程式を考える。この方程式は境界条件(11)のもとで，

$$\frac{1}{2}\kappa = n^2\pi^2 \ (n = 1,\ 2,\ 3\cdots), \tag{20}$$

のときに，唯一の非自明解

$$\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin n\pi x \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

を持つ。すなわち，固有値 $n^2\pi^2$ には (21)なる固有ベクトルが属し，また，$n^2\pi^2$ は単純固有値であることが示された。

以上の考察より，単純固有値からの分岐に関する定理(文献［５］，188頁，定理5. 1）によって，本定理は証明されたことになる。

§４　最 後 に

本稿では，非線形シュレーディンガー方程式(1)，(2)に解の分岐が生じることを証明した。分岐は，カオスやソリトンと並んで，非線形方程式が示す重要な性質のひとつであるが，非線形シュレーディンガー方程式に関しては，あまりくわしくは調べられていないように思われる。今後の研究に期待したい。

参考文献

[1] T. Bountis and L. Drossos : Phys. Lett. A**143** (1989) 379.

[2] Y. Morimoto : Phys. Lett. A**147** (1990) 199.

[3] C. H. Oh and R. R. Parwani : J. Phys. A**23**(1990) L871（この論文のReferencesも参照).

[4] M. Florjanczyk and R. Tremblay : Phys. Lett. A**141** (1989) 34.

[5] S. N. Chow and J. K. Hale : *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1982).