Critical Phenomenon in a Population of Limit-Cycle Oscillators with Random and Frustrated Interactions

九工大工　大同寛明

自然界にはリミットサイクル振動子の集団とみなせるような系が多数存在する。そのような系の振舞いを適当なモデルを使って調べるとき、これまで、各振動子の固有振動数のばらつきという形でのｑｕｅｎｃｈｅｄ　ｄｉｓｏｒｄｅｒは考慮されてきたものの、振動子間の相互作用にも多かれ少なかれ内在するはずのｒａｎｄｏｍｎｅｓｓは無視されてきた。数年前、初めて、フラストレーションを伴わぬ乱れを持つモデルが提出され、疑似グラス相への相転移が詳しく調べられた（文献１）。しかし、現実の相互作用は、少なくともある程度は、フラストレートしているものと考えられる。研究会では、まず、ランダムかつフラストレートした相互作用を持つ振動子集団のある程度一般化されたモデルを提出し、次に、その特別の場合に当たる以下のモデルについて、数値計算の結果を報告した：

$$\dot{\theta}_j = \Omega_j + (2\pi)^{-1}\sum_{i=1}^{N} J_{ij}\ \sin 2\pi(\theta_i - \theta_j) \qquad (j=1,\ldots,N),$$

ここで、θ_j はｊ番目の振動子の位相、Ω_j は固有振動数を表し、$J_{ij} = J_{ji}$ は互いに独立な確率変数で、それぞれ、平均０、分散 J^2/N のＧａｕｓｓ分布に従うものとする。

典型的な結合強度Ｊをパラメタとして０から大きくして行くとき見られた現

象の要点は次の通りである。Ｋｅｙとなるのは各振動子にかかる局所場：

$$p_j = J^{-1}\Sigma_{i=1}^{N} J_{ij}\exp(2\pi i' \theta_j) \qquad (i' \equiv (-1)^{1/2})$$

の時間的変動に関する分布関数である。Ｊが小さいとき、それはＧａｕｓｓ的な形であるが、Ｊ＝０．０７あたりで火山型に変わる（図１）。これは、一種の引き込み相転移がそのＪに対して起こることを反映している。実際、平均振動数が０であるもの（数値計算では固有振動数の分布は平均０、分散１のガウス分布としている）の割合ＱをＪに対してプロットすると、上の転移点付近でＱが立ちあがり、Ｊと共に増大することがわかる（図２）。このような相転移をへて現れる秩序相はどのような特徴を持つのであろうか？　現在の所わかっているのは、

（１）準引き込み（ｑｕａｓｉ－ｅｎｔｒａｉｎｍｅｎｔ）

通常のｐｈａｓｅ－ｌｏｃｋｉｎｇではなく、引き込まれた振動子の位相は相互に拡散的に、時間と共に離れていく（つまり、この”引き込み”は、引き込みか否かはっきりしないｆｕｚｚｙな性格を持つ）。このため、ｐｈａｓｅのｏｒｄｅｒは転移点後にも存在しない。

（２）　非指数的緩和（ｓｌｏｗ　ｒｅｌａｘａｔｉｏｎ）

秩序パラメタや相関関数が代数的に緩和する。図３はパラメタＺの０への収束が、転移点を境として、指数型から代数型に変わることを示したものであり、前者の緩和時間τと後者のべき指数αのＪ依存性も併せて示す。

ここで調べたモデルは、Ｋｕｒａｍｏｔｏのモデル（文献２）をスピン系のＨｕｓｈｉｍｉ－Ｔｅｍｐｅｒｌｙモデルとすれば、ＳＫモデルに相当するものである。上の秩序相にある振動子集団は、いくつかの点で、いわゆるガラス

（一般化された意味で）ときわめて類似している（特に（2））。そこで、このような振動子系を”オシレーターガラス”と呼ぶことにしたい。これが現実の生理学的な系や神経情報処理系などに存在するかどうかは興味ある問題である。詳しい性質は目下研究中である（この報告の詳細は文献3）。

References

1. H. Daido, Prog. Theor. Phys. 77 (1987), 622.
2. Y. Kuramoto, in Lecture Notes in Physics 39 (1975).
3. H. Daido, submitted.

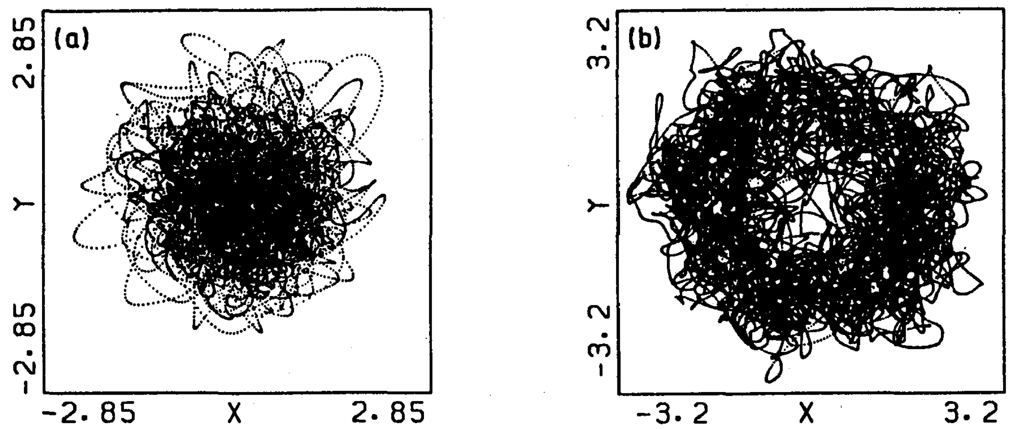

図1. ひとつの局所場の複素平面上のポートレート

N＝500　（a）J＝4　（b）J＝14.

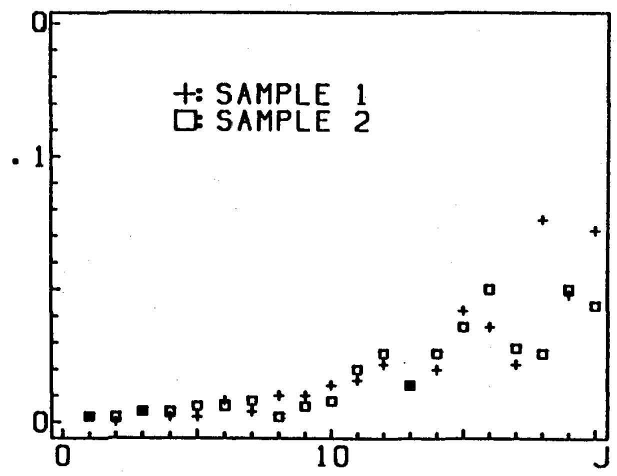

図２．Ｑ　ｖｓ．Ｊ

シンボルの違いはサンプルの違いを表す。

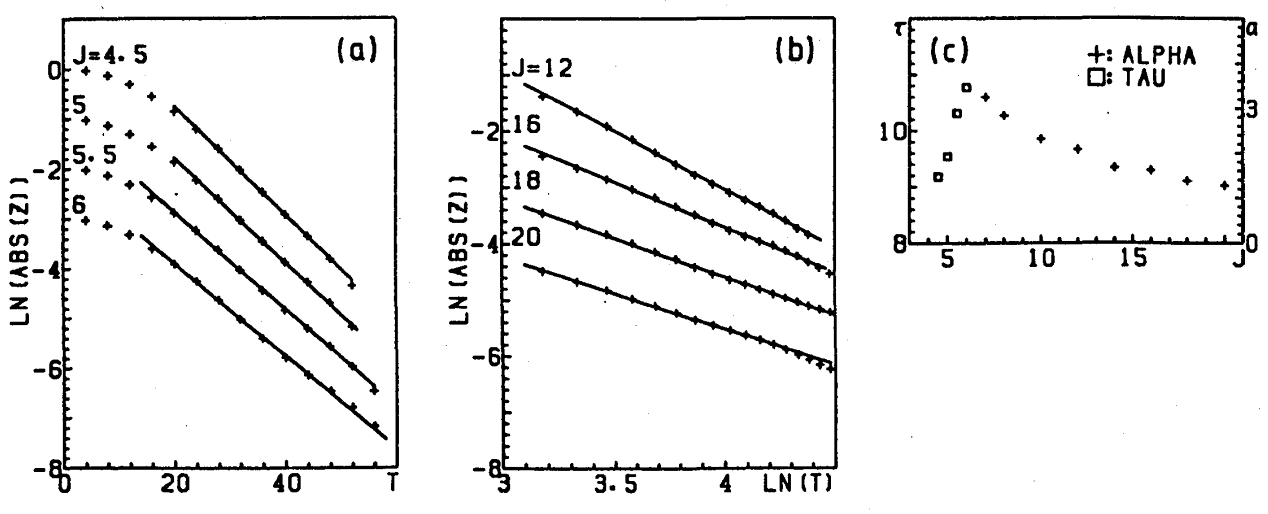

図３．秩序パラメタＺ（１０個のサンプルについて平均）の緩和：

$$Z = N^{-1}\Sigma_{j=1}^{N}\exp(2\pi i'\theta_j).$$

（ａ），（ｂ）では、Ｊが増えるにつれて１ずつ下に移動してある。