

膜の自励発振に於けるカオスの解析

電気通信大学電子物性工学科

八木沢 亨一

2種類の水溶液が脂質二重膜によって隔てられた系での膜電位の自励発振のモデルを我々は提案し、数値解析を行なった。そこでは、膜の脂質層がゲル・液晶の2状態の間を相転移を繰り返しながら往復する。相転移は膜近傍のpHの変化によって引き起こされる。一方、相転移に伴うパーミアビリティーの変化は膜中のカチオンの流束や膜近傍のpHを変化させる。これらの事が互いに引き金になって相転移は反復する。パーミアビリティーの変化に伴い膜電位も変化するので、相転移の反復は膜電位の周期的変動をも生む。これが自励発振の原因であると考えている。系の時間発展を与える式を求め数値計算を行なった例が図1である(横軸は時刻、縦軸は膜電位)。自励発振しているこの膜系に外力として交流電流の印加を仮定すると、系の振舞いが複雑化し、電流の強さや振動数によっては発振の仕方が周期的、準周期的、或いはカオス的になる(図2はカオスの例。座標軸は図1と同じ)。これについては、系の振舞いの性質を保ったまま方程式を大幅に簡単化する事が可能で、式は履歴項を持つ1変数1階の微分方程式

$$(1) \quad \begin{aligned} (d/dt)X &= D+1+F_G \sin(2\pi\omega t) & \text{if } S(t)=G \\ & D-1+F_L \sin(2\pi\omega t) & \text{if } S(t)=L \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} S(t) &= G & \text{if } X \leq -1 \\ & L & \text{if } X \geq 1 \quad (\text{Gはゲル、Lは液晶の意}) \\ & S(t-\delta t) & \text{otherwise} \end{aligned}$$

に帰着される。規格化されたこの式において、Sは脂質層の相状態を表し、Xは膜近傍の溶液のpHに対応している。ここでは $X = \pm 1$ で相転移が起こる。 F_G, F_L, D, ω は系のパラメーターで、Dは絶対値が1より小さく、他の3つはいずれも正の値をとる。 F_G と F_L は交流電流の振幅に比例し、 ω は交流の振動数に比例する。(1)式右辺の第三項は

交流電流の効果である。Dは、外力ゼロの時に各相状態が占める時間の比に関係した量である。相状態SがGからLにスイッチする時の交流電流の位相を θ 、その次にSが同じ向きにスイッチする時の交流の位相を $f(\theta)$ とおけば、系はこの1次元関数 f により完全に記述される。パラメーターが

$\min(F_G - D, F_L + D) > 1$ になる時、関数 f は不連続点を持ち、系の振舞いはカオスか周期運動のいずれかになる。一方、 $\min(F_G - D, F_L + D) \leq 1$ の時は、 f が単調な1対1の連続関数になるので、非カオス領域のサークル・マップと同様、系は周期的もしくは準周期的な動きのみを見せる。例えばパラメーターが $F_G = F_L = 1.4$,

$\omega = 0.49$, $D = 0$ の場合、関数 f のグラフは図3、Xの時間発展は図4の様になり、系の振舞いはカオティックである。この系で我々は特に $F_G = F_L$ の場合について、パラメーター F_G, D, ω を滑らせ、系の振舞いの変化を調べた。その結果、カオスの起き易い条件として次の2つが挙がり、それ以外のカオスはかなり稀である事が判明した。その条件とは、①Dの絶対値が1に近いこと、② ω が

$(1 + |D|) / 2$ の整数倍より少し小さいこと であり、このうち一方を充す事が十分である。これらの時にカオスが起き易い理由は、 f のグラフに関する幾何学的考察から判る。図5は、 $F_G = F_L = 1$ として ω とDを滑らせた場合の相図である。ここでは黒い部分がカオス、白い部分が安定周期解に対応す

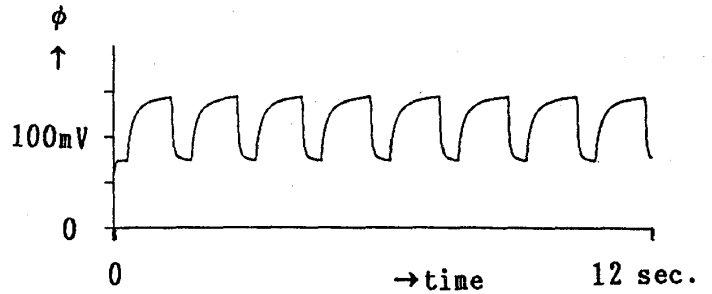


図1. 膜電位 ϕ の時間変化 (外力なし)

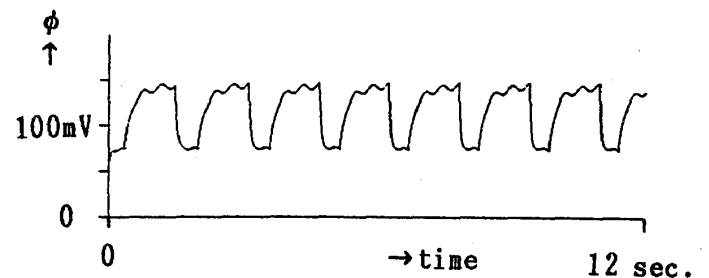


図2. 膜電位 ϕ の時間変化 (外力あり)

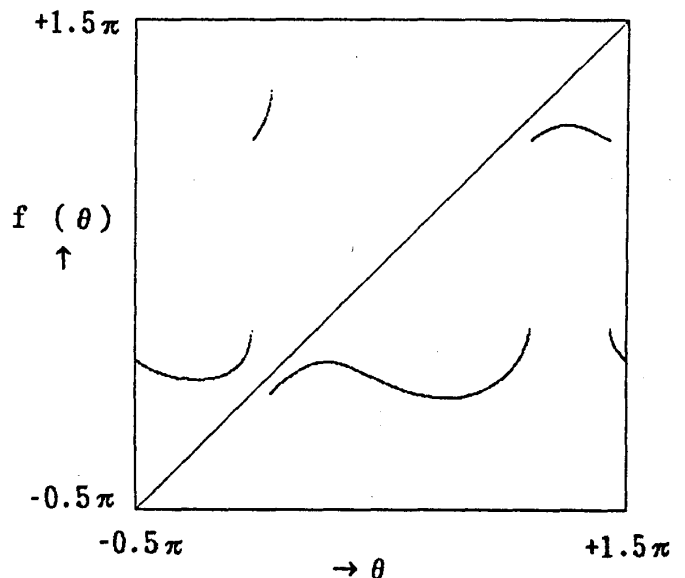


図3. 関数 f (ポアンカレ写像)

る。カオスは殆どの場合、外力の振動数が自励発振の自然振動数より数倍大きい時に起きている。また、関数 f が不連続点を持つ為、サークル・マップやロジスティック・マップとは違い、ウィンドーの入らない '構造安定な' カオス領域がパラメーター空間内に存在する (図5では、黒い部分のうち $0.8 < D < 1$ の辺りがそれに該当)。カオスに至る周期倍加ルートは一般に見られない。またウィンドーが密に存在する所では、隣り合うウィンドーの周期の間に周期加算則が見られ、この意味で系はサークル・マップに似ている。図6は、 $\omega=0.7, D=0.5$ として F_0, F_1 を 0.15 から 1.35 まで滑らせた時の相図。横軸は F_0 ($F_0 = F_1$ としている)、縦軸は位相 θ の分布である。ウィンドーの周期に加算則が見てとれる。

方程式系 (1), (2) は実に単純な形をしており、それにより記述される力学系の振舞いはかなり性質が良く扱い易い。パラメーターを勝手に与えた時、系の振舞いについて次の2つの条件が同値ではないかという気がするが、証明については筆者は知らない。

- A. 殆ど全ての初期値はカオティック・アトラクターの上にある。
- B. 有限個の区間の直和 I と正整数 k が存在して、 $f(I) = I$ かつ写像 f^k の導関数の絶対値が I 上一様に 1 より大きい。

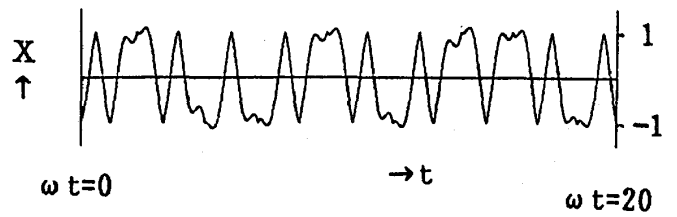


図4. Xの時間変化

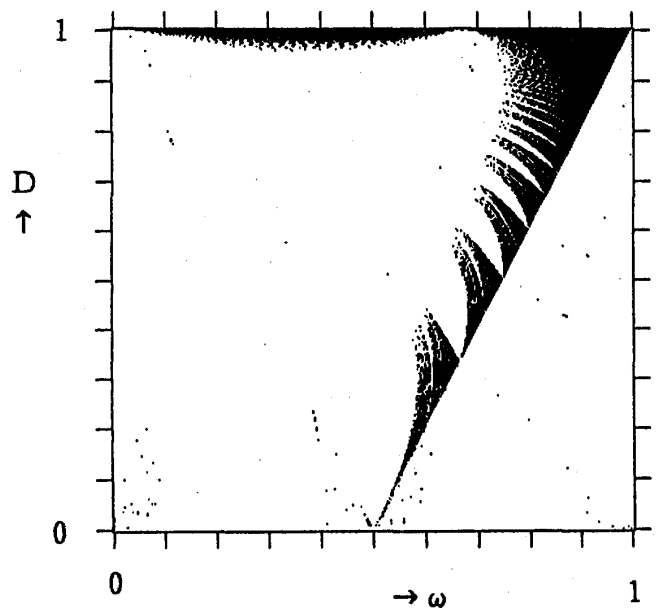


図5. 相図 (黒; カオス、白; 安定周期解)

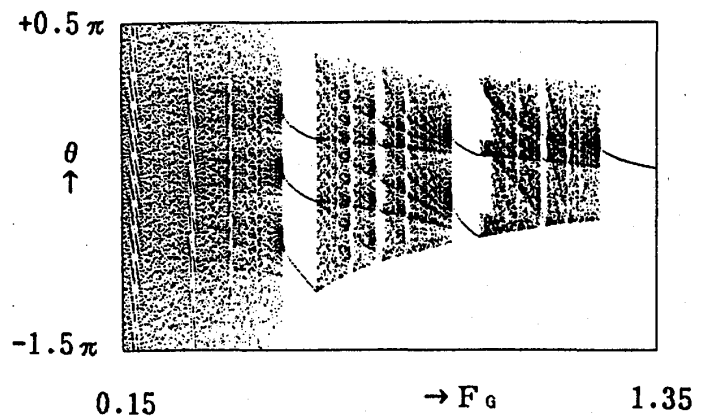


図6. ウィンドーの周期加算則