カオス要素のネットワーク

東大・教養　　金　子　邦　彦

§1．はじめに

これまで大自由度カオスの典型例として，時空カオス（空間に広がった系でのカオス現象）を調べてきた[1)]。そこで，適度に粗視化した立場で，「手続き還元論」により，Coupled Map Lattice を導入した。それにより，時空カオスの新しい現象を見出した。今のところ，低自由度カオスのオンセットの際のような定量的普遍性は見出されず，むしろ，「定性的普遍性」（メタファー）として時空カオスを捉えていくという立場にたっている[2)]。そういう意味では，最近の数多くの CML の研究や時空カオスの実験は初期の CML の結果の定性普遍クラスと矛盾はしていないように思われる。しかし，カオスの理解をふまえて時空カオス現象を捉えていく試みは理論的にはまだまだ未発達である[3)]。

以上は主に局所的相互作用の場合であったが，大域的相互作用をもった非線型系も面白い問題である。このような例は多モードレーザー，ジョセフソン結合，電荷密度波，流体等の物理系，進化，生態系，経済（？），脳のダイナミクスなどで数多くあるにもかかわらず，統一的研究はあまりなされていない。ここでは，要素系のカオス，結合の大域性を残した，ミニマル・モデルとして Globally Coupled Map（GCM）を導入し，そこでみられる普遍的な性質を論じよう。[4)5)]具体的には CML の平均場版として，

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_n(j)) \tag{1}$$

を考える。ここで，i は N 個の要素の番号，n は離散時間，ε は結合の強さ，$f(x)$はカオスをもつような１次元マップで，以下では主にロジスティックマップ $f(x)=1-ax^2$ を用いる。なお，このモデルは変換により，

$$y_{n+1}(i) = f\left((1-\varepsilon)y_n(i) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} y_n(j)\right) \tag{2}$$

と等価であり，この形で見ると，我々のモデルは，スピングラスや神経回路網と比べ，結合のランダム性をなくし，ダイナミクスのカオス性を導入したものとしても捉えられる。カオスはランダムネスをつくり出しうるので，静的側面としてはスピングラス等と類似な点をもつ可能性もあるが，カオスのランダムネスは，時間，精度，アトラクター（初期

値）に依存するので，上記モデルは動的複雑系への１つの規範型モデルとなりうるかもしれない。

§2．クラスタリング[4)]

我々のアトラクターは，ひきこんでしまった要素の集合としてのクラスターによってコードされている。そこで，クラスターは，$x_n(i)=x_n(j)$ となっている要素の集合である。クラスターの数を k，各クラスターに属している要素の数を $N_j\ (\sum_{j=1}^{k} N_j = N)$ とし，クラスターの要素の x の値を $X_n(j)$ とすると，モデル(1)は k 次元マップ

$$X_{n+1}(j)=(1-\varepsilon)f(X_n(j))+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j f(X_n(j)),\quad \varepsilon_j=\frac{N_j}{N}\varepsilon \tag{3}$$

に還元される。

クラスターの分布により，我々の系は以下の４つの相をもつ。

(1)　コヒーレント相：$k=1$ のシンクロしたアトラクターがほとんどすべてのベイスンを占める。

(2)　秩序相：数少ないクラスターをもつアトラクターがベイスンを占める。定量的にはクラスター数の（初期状態に関する）平均が$O(1)$であることで記述される。

(3)　部分秩序相：クラスターの平均数は$O(N)$であるが，N よりは小さい。つまり，要素は完全にばらばらでなく，一部まとまって振動している。

(4)　乱流相：クラスターの数はどの初期状態から出発しても N，つまり完全にばらばらになっている。

非線型性 a を増す，ないし，カップリング ε を減らすにつれ，相(1)→(2)→(3)→(4)の逐次変化が起っていく。

以下では部分秩序相のスピングラス的様相とカオス的遍歴，乱流相の隠れた秩序について議論していこう。

§3．部分秩序相の分割の複雑さ[6)]

部分秩序相のアトラクターでは要素数の多いクラスターと少ないクラスターから成りたち，少ないクラスター同志は，互いに値が近いことが多い。一般に部分秩序相のアトラクターは，精度を導入することにより，非一様な樹枝状構造として記述される。

更に，この相では多くのアトラクターが共存しており，それによって，クラスター数またクラスターへの分割のしかたも大きく異なる。２つの要素が同じクラスターに属する確率 Y は各アトラクターに対し $Y=\sum_{i=1}^{k}(N_i/N)^2$ で計算できる。この Y の初期条件に対しての分布 $\pi(Y)$ は分割の多様性をあらわす。実際，部分秩序相ではゆらぎ $(\delta Y)^2$ が増大している。スピングラス等においては，同種の問題（但し$\pi(Y)$は異なるランダムカップリン

グに対する分布）が議論され[7]，$(\delta Y)^2$ の増大，$N\to\infty$ でも有限に残ること，$(\delta Y)^2=\frac{1}{3}\overline{Y}(1-\overline{Y})$ が示されている。我々の系では，最初の２つは成立しているが，$(\delta Y)^2$ と $\overline{Y}$ の定量的関係は成立していない。大自由度カオスでの定性的普遍性の成立と定量的普遍性の破れの一例ともいえる。

§4．部分秩序相でのカオス的遍歴[4)8)]

§3ではアトラクターの静的面を眺めてきた。動的には，このアトラクターは，有効自由度の低い秩序的運動と，ほとんどバラバラに近付いた自由度の高い状態を間欠的にスイッチする。秩序的運動は幾つか存在し，ほとんどアトラクターであるが，ある方向にのみ不安定な“アトラクターの残骸”[9]と呼ぶべきものである。一方，自由度の高い乱れた状態は準定常で，そこから秩序状態へのスイッチは突如，短時間に起る。つまり，相空間内でアトラクターは高自由度状態と，そこから低自由度の空間への出口，そして低自由度側からの不安定多様体近傍の軌道から成り立っている。

上のような運動形態は，乱流のコヒーレント構造，光乱流[9]，脳のモデル[10]等で見出され，カオス的遍歴と名付けられている。大自由度カオス系での秩序と乱れをつなぐ普遍的現象と思われる。

§5．乱流相における隠れた秩序[5]

もし，乱流相の運動が完全にバラバラで何ら相関がなければ，平均場 $h_n\equiv\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f(x_n(j))$ は N 個ランダム場の平均とみなせるから，その分布 $P(h)$ の分散は $1/N$ で減少することが予想される。我々の系では，分散はあるサイズ N_c まで減少するが，それ以上のサイズでは有限のまま保たれる。このことは要素間に有限の相関が $N\to\infty$ でも残っていることを意味し，実際，相互情報量による計算も，このことを支持している。分布 $P(h)$ は N_c までにガウス分布に十分接近するが，それ以上のサイズでは分布の裾にわずかなずれが残っている。

この種の相関の発生は，カオス系が伸ばす部分と縮む部分から成り立っていれば，かなり普遍的に見られる。また，この系に更に雑音を付加すれば，分散はサイズとともに減少する。但し，この減少は，$\beta\leq 1$ の指数で $N^{-\beta}$ で起る。アトラクターが樹枝状に組織化されていることと関連すると思われる。

§6．生物情報処理に向けて

大域的結合をもった大自由度カオス系の性質を調べてきた。ここで見出された現象は脳のダイナミクスの理解にも有効であると思われる。カオス的遍歴の重要性は津田により議

論されている。[10)11)]視覚野での部分的ひきこみ現象は，カオス的である可能性が強く，部分秩序相での部分ひきこみ状態と類似である。[12)13)]また，ここでは触れられなかったが我々の系では幾つかのアトラクターを強いカオス状態を経由してスイッチさせることが可能であり，Freeman による嗅球でのカオティック・メモリー探索と類似である[14)]。GCM の研究をもとに生物情報処理の問題を追究していくことは今後の重要な課題である。

参 考 文 献

1) K. Kaneko, Prog. Theor. Phys, **72** (1984) 480, **74** (1985) 1033; Physica **23D** (1986) 436; **34D** (1989) 1; **37D** (1989) 60; J. P. Crutchfield and K. Kaneko, in "Directions in Chaos" (World Scientific, 1987)
2) K. Kaneko, in "Pattern, Order, and Chaos" (Plenumn, 1991, ed. P. Cvitanovic)
3) K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. Suppl. **99** (1989); L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, Nonlinearity **1** (1989) 491
4) K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 219; Physica **41D** (1990) 38
5) K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 1391 and errata (**66** (1991) 243)
6) K. Kaneko, J. Phys. A, in press
7) M. Mezard et al., J. de Physique **45** (1984) 843; B. Derrida and H. Flyvbjerg, ibid **48** (1987) 971; K. Nishimura, K. Nemoto and H. Takayama, preprint (1990)
8) K. Kaneko, preprint (1991)
9) K. Ikeda, K. Matsumoto, and K. Otsuka, Prog. Theor. Phys. Suppl. **99** (1989) 295
10) I. Tsuda, in "Neurocomputers and Attention" (Manchester Univ. Press, 1990, ed. A. V. Holden and V. I. Kryukov)
11) I. Tsuda, in "World Future" (1991)
12) C. M. Gray et al., Nature **338** (1989) 334
13) R. Eckhorn et al., Biol. Cybernetics **60** (1988) 121
14) W. Freeman, Brain Res. Rev. **11** (1986) 259