ランダムイジング模型による比熱のゆらぎ

鹿県短大　田中稔次朗
九大　理　藤坂　博一
鹿大　理　井上　雅義

ランダム磁性体におけるゆらぎの問題はこれまで多くの人々によって研究されてきた[1-7]．特にクエンチ系の自由エネルギーのゆらぎはフラクタル次元と関連して興味をもたれている．最近，我々はランダムイジング系の自由エネルギーのゆらぎの大局的性質を，定常時間揺動の統計物理学的な解析法として展開された揺動スペクトル理論[8]を用いて調べた[9,10,11]．このノートの目的はランダムに希薄な一次元イジング模型における比熱のゆらぎの統計的性質を明らかにすることである．

考察する一次元のランダムイジング系のハミルトニアンは次のように表される．

$$H_N = -\sum_{i=1} J_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad , \tag{1}$$

ただし，Nはスピン数，$\sigma_i = \pm 1$はi番目のサイトのスピン，J_iは最隣接スピンσ_iとσ_{i+1}の間の結合定数である．J_iはサイトiに関して統計的に独立なランダム変数で，$J_i = 0$または1の値をとる．N個のイジングスピン系の分配関数は次のように表される．

$$Z_N(\beta) = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \exp(-\beta H_N) \quad ,$$

$$= 2^N \prod_{i=1}^{N} \cosh(\beta J_i) \quad , \tag{2}$$

ただし，$\beta = 1/k_B T$である．希薄ボンドのランダムな分布$\{J_i\}$が与えられると，分配関数(2)を計算することができる．

さて，系の1スピン当りの自由エネルギーf_Nは

$$f_N = -\frac{1}{N} \beta^{-1} \ln Z_N(\beta) \quad , \tag{3}$$

で与えられる．系の内部エネルギーε_Nは1スピン当り，

$$\varepsilon_N = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta f_N\right) ,$$

$$= -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_i \tanh\left(\beta J_i\right) , \tag{4}$$

となる．したがって，Ｎスピン系における１スピン当りの比熱は$C_N=d\varepsilon_N/dT$から，

$$\frac{C_N}{k_B} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\beta J_i \ \mathrm{sech}(\beta J_i)\right]^2 , \tag{5}$$

のように得られる．

ここで，比熱C_Nのゆらぎの統計的性質を調べるために，特性関数$\phi(q)$を次のように導入する[11,12,13]．

$$\phi(q) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\left\langle e^{qNC_N/k_B}\right\rangle , \tag{6}$$

ただし，ｑは無次元のパラメータ（$-\infty<q<\infty$）である．〈…〉はランダムな希薄ボンドの分布｛J_i｝の集団についての平均を表す．特性関数$\phi(q)$は，比熱のゆらぎの漸近的な実現確率と関係しており，確率密度を$\rho_N(c)$とすると[9,10]，

$$\rho_N(c) \sim \exp\left[-\beta N\sigma(c)\right] , \tag{7}$$

のように表される．ここで，$\sigma(c)$は揺動スペクトルである．ｑ，$\phi(q)$からルジャンドル変換によって，ｑ次の１スピン当りの比熱$C(q,\beta)$や揺動スペクトル$\sigma(c)$は次のように与えられる[11]．

$$C(q,\beta) \equiv \frac{\partial\phi(q)}{\partial q} , \tag{8}$$

$$\sigma(c(q,\beta)) \equiv q^2\frac{\partial}{\partial q}\left[\phi(q)/q\right] , \tag{9}$$

$$\sigma(c(q,\beta)) = qC(q,\beta) - \phi(q) , \tag{10}$$

したがって，(6)，(8)からq次の1スピン当りの比熱は，

$$C(q,\beta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \frac{\langle \sum_{i=1}^{N} [\ \beta J_i\ \mathrm{sech}(\ \beta J_i\ )]^2\ g(q,\beta)\ \rangle}{\langle\ g(q,\beta)\ \rangle} \tag{11}$$

ただし，

$$g(q,\beta) = \exp\{\ q \sum_{i=1}^{N} [\ \beta J_i\ \mathrm{sech}(\ \beta J_i\ )]^2\ \} \quad , \tag{12}$$

特にq→0のとき,(11)は

$$C(0,\beta) = \lim \frac{1}{N} \langle \sum_{i=1}^{N} [\ \beta J_i\ \mathrm{sech}(\ \beta J_i\ )]^2\ \rangle \quad ,$$

$$= \lim_{N\to\infty} C_N \quad , \tag{13}$$

となり，熱力学的極限における比熱を与える．

ところで，(6)，(11)を計算するために，希薄ボンドJ_iのランダムな分布を知る必要がある．ここではJ_iの分布を次のように確率で与える．i番目のボンドが存在しない場合，つまり$J_i=0$の値をとる確率をp，ボンドが存在する場合，$J_i = J$の値をとる確率を1－pとする．したがって，このモデルでは特性関数は次のようになる．

$$\phi(q) = \ln [\ p + (\ 1 - p\ )e^{q[\ \beta J\ \mathrm{sech}(\ \beta J\ )]^2}] \quad , \tag{14}$$

q次の1スピン当りの比熱は

$$C(q,\beta) = \frac{(1-p)[\beta J\ \mathrm{sech}(\ \beta J\ )]^2\ e^{q[\beta J\ \mathrm{sech}(\ \beta J\ )]}}{p + (1-p)e^{q[\ \beta J\ \mathrm{sech}(\ \beta J\ )]^2}} \tag{15}$$

となる．また，揺動スペクトルは(10)から求めることができる．ところで，q＝0の場合，(15)は$C(0,\beta) = (1-p)[\beta J \mathrm{sech}(\beta J)]^2$となり，一次元の希薄化イジング模型の通常の比熱を与える．

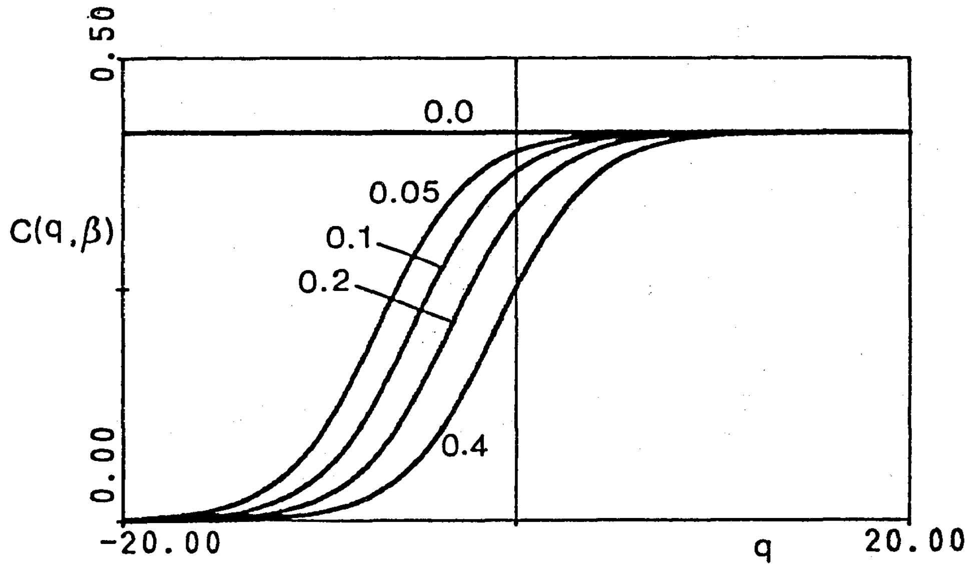

図１　ボンドの希薄化確率ｐの幾つかの値に対する
ｑ次の１スピン当りの比熱C(ｑ，β)．このとき温度は$k_B T/J=1.0$.

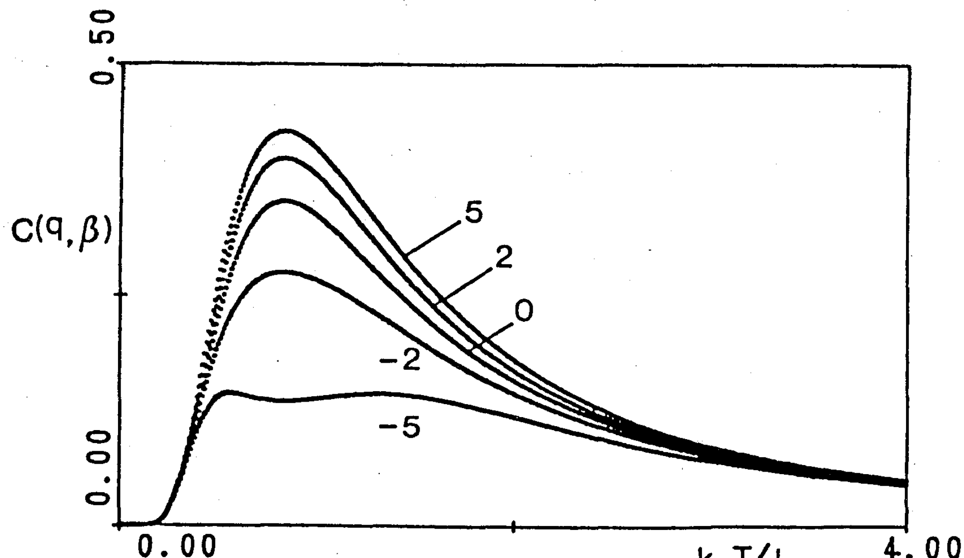

図２　ｐ＝0.2の場合のｑ次の比熱の温度依存性．
各曲線の数値はフィルタリングパラメータ
ｑの値を示す．

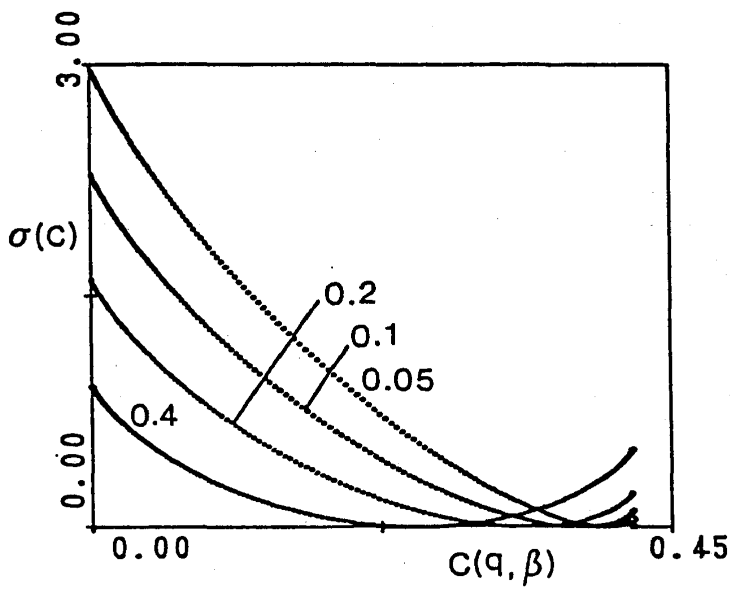

図３　温度が$k_BT/J=1.0$の場合の揺動スペクトル$\sigma(C)$，各曲線の数値は確率ｐの値である．

ｑ次の比熱$C(q,\beta)$をｑの関数として図１に示す．比熱のゆらぎの幅は$\Delta C=C(\infty,\beta)-C(-\infty,\beta)$で与えられる．　ボンド希薄化の確率が$p=0.2$の場合の$C(q,\beta)$をｑの幾つかの値に対して，温度$k_BT/J$の関数として図２に示す．$q=0$の曲線は通常の比熱曲線である．また，揺動スペクトル$\sigma(C)$を図３に示す．$\sigma(C)$は$C=C(0,\beta)$で最小値$\sigma(C)=0$をとる．すなわち，$N\to\infty$では$\sigma(C)=0$を与えるCの値のみが系の比熱として実現する．これらの数値計算の結果から，一次元ランダムイジング模型の比熱のゆらぎの統計的性質は，ｑ次の比熱や揺動スペクトルによってよく記述されることがわかる．

参　考　文　献

1) B. Derrida and H. J. Hilhorst, J. Phys. C : Solid State Phys. 14, L539(1981).
2) B. Derrida, Phys. Rep. 103, 29(1984).
3) R. Bruinsma and G. Aeppli, Phys. Rev. Lett. 50, 1494(1983).
4) G. Aeppli and R. Bruinsma, Phys. Lett. A97, 117(1983).
5) B. Derrida and H. J. Hilhorst, J. Phys. A : Math. Gen. 16, 2621 (1983).

6) G. Gyorgyi and P. Rujan, J. Phys. C : Solid State Phys. 17, 4207 (1984).
7) J. M. Normand, M. L. Mehta and H. Orland, J. Phys. A : Math. Gen. 18, 621(1985).
8) J. Bene and P. Szepfalusy, Phys. Rev. A37, 1703(1988).
9) H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. 77, 1334(1987).
10) H. Fujisaka and M. Inoue, Phys. Rev. A, 39, 1376(1989).
11) M. Inoue and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 79, 557(1988).
12) T. Tanaka, H. Fujisaka and M. Inoue, Phys. Rev. A, 39, 3170(1989).
13) T. Tanaka, H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. 84, 584 (1990).