

パラメトリックな励起下での拡散の異常増大

九大理 °安藤智 藤坂博一

周期外力より駆動された振子

$$\ddot{x} = -k\dot{x} - [a + A \cos(\omega t)] \sin 2\pi x$$

のバンド融合直後の Intermittent Switching の様相を揺動スペクトル理論を用いて解析し、特性量に対しスケーリング則が成り立つことを示した。

この系は、各係数によって様々な運動を示すが、今回は周期外力の強度を表す A を制御変数とした。この系は、 A の値によっても様々な運動を示す。 A が 0 から大きくなるにつれ固定点 $x = \dot{x} = 0$ が安定な状態から不安定となり、固定点の周りに安定、不安定リミットサイクルが生じる。さらに A を大きくしていくと粒子は周期ポテンシャルの山を越え、大域的な運動を行うようになる。

A を増加していくと 2^n 周期を持つ一連の運動が生じ Period-doubling を経てカオスが生じる。Fig. 1 は、周期外力の周期毎にストロボプロットをとったものであり $A < A^*$ では、二つのアトラクター (Fig. 1-a,b) が存在していることがわかる。この領域の A では系は対称性を失っており、それぞれのアトラクターは粒子が右 (Fig. 1-a) もしくは左 (Fig. 1-b) にドリフト運動しているのに対応している。 $A > A^*$ では、上の二つの領域が融合し一つのアトラクターが形成される。(Fig. 1-c,d) 講演ではバンド融合直後における系の統計的な性質を報告した。

$A \sim A^*$ での系の特徴は次の点である。 $A < A^*$ では二つの同等なアトラクターが存在しており、どちらのアトラクターに落ち着くかは初期値に依存する。また二つのアトラクターはそれぞれ右もしくは左にドリフト運動している状態を表している。 $A > A^*$ では $A < A^*$ での二つのアトラクターが融合し、一つのアトラクターを形成している。その結果として方向に関する対称性が回復し、拡散状態が実現されている。

$A < A^*$ では系はドリフト状態にあり、このとき拡散係数 D は 0 である。一方 $A > A^*$ では

$$D \propto (A - A^*)^{-\theta}, (\theta = 0.815 \dots)$$

のように A と共に増大する。(Fig. 2) ここでは大域的運動に注目しているため次のような量 u_j を定義する。

$$x_n \equiv x(nT), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$N_n \equiv [x_n]$$

$$u_n \equiv N_{n+1} - N_n$$

$A \sim A^*$ 近傍での粒子の跳び u_n は $A < A^*$ では $u_n = +1$ か -1 のいずれかであり、 $A > A^*$ ではバンド融合により u_n は $+1, 0, -1$ の値をとり得る。 u_n は長時間平均は 0 であるが $+1, 0, -1$ と大きく揺らぐ量である。 u_n の統計的性質を明らかにするために次のような揺動スペクトル法を用いて解析した。

$$\alpha_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j, \quad -1 < \alpha_n < +1$$

$$\rho_n(\alpha) \equiv \langle \delta(\alpha - \alpha_n) \rangle$$

$$Mq(n) \equiv \langle \exp(qn\alpha_n) \rangle$$

n が十分に大きいとき

$$\rho_n(\alpha) \sim \exp\{-n\sigma(\alpha)\}$$

$$Mq(n) \sim \exp\{n\phi(q)\}$$

となり、 $\sigma(\alpha)$ と $\phi(q)$ の間には次の関係が成り立つ。

$$\phi(q) = -\min_{\alpha} [\sigma(\alpha) - q\alpha]$$

ここで次のような特性量を定義すると

$$\alpha(q) \equiv \frac{d\phi(q)}{dq}$$

$\sigma(\alpha)$ は $\alpha(q)$, $\phi(q)$ を用いて

$$\sigma(\alpha) = \alpha(q)q - \phi(q)$$

と表せる。更に、

$$\chi(q) \equiv \frac{d\alpha(q)}{dq}$$

は、 q を変化させたときの平均 $\alpha(q)$ の変化率で、これは一種の感受率である。Fig. 3 はシミュレーションの結果である。

さらにこの結果を説明するために以下のような2状態マルコフモデルを考える。 $u_n = +1$ から -1 への遷移確率を κ とすると、次のようなスケーリング則が成り立つことがわかる。(Fig. 4)

$$\phi(q) = \kappa \bar{\phi}\left(\frac{q}{\kappa}\right), \quad \bar{\phi}(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$$

$$\alpha(q) = \bar{\alpha}\left(\frac{q}{\kappa}\right), \quad \bar{\alpha}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\chi(q) = \frac{1}{\kappa} \bar{\chi}\left(\frac{q}{\kappa}\right), \quad \bar{\chi}(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sigma(\alpha) = \kappa \bar{\sigma}(\alpha), \quad \bar{\sigma}(\alpha) = 1 - \sqrt{1-\alpha^2}$$

Fig. 4 は数値実験と上の理論値との比較であり、よく一致していることがわかる。以上より $A < A^*$ では系はドリフト状態にあり、拡散係数は0であり、 $A > A^*$ では A が A^* より離れれば離れるほど α_n が ± 1 をとる確率が減少し、逆に A が A^* に近づけば近づくほど α_n が ± 1 をとる確率が増大することがわかる。更にこれらの揺らぎを特徴づける統計的特性量が上によるスケーリング則を満たすことを見いだした。

Fig. 1-a $\epsilon \equiv \frac{A - A^*}{A^*} = -10^{-3}$

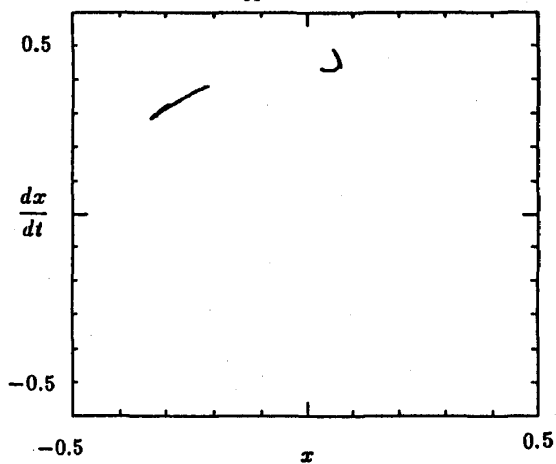


Fig. 1-b $\epsilon = -10^{-3}$

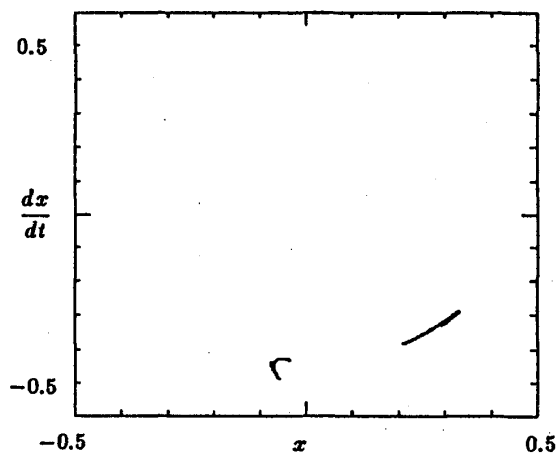


Fig. 1-c $\epsilon = 10^{-3}$

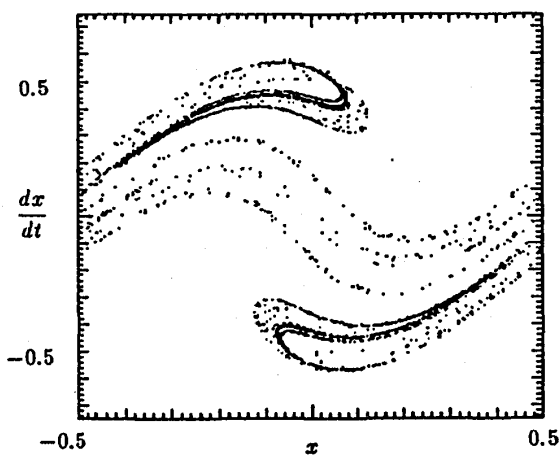


Fig. 1-d $\epsilon = 10^{-1}$

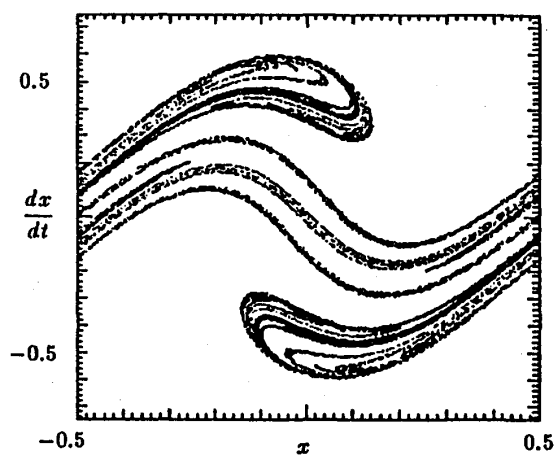


Fig. 2

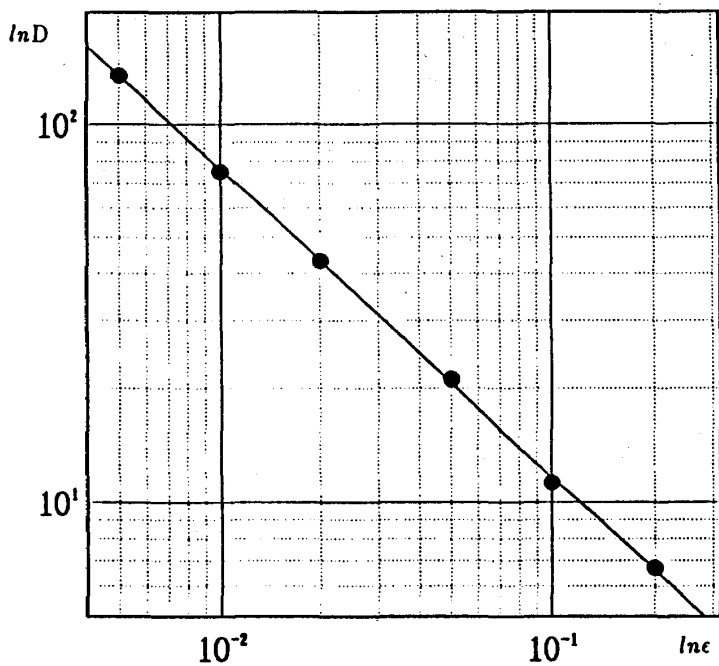


Fig. 3-a

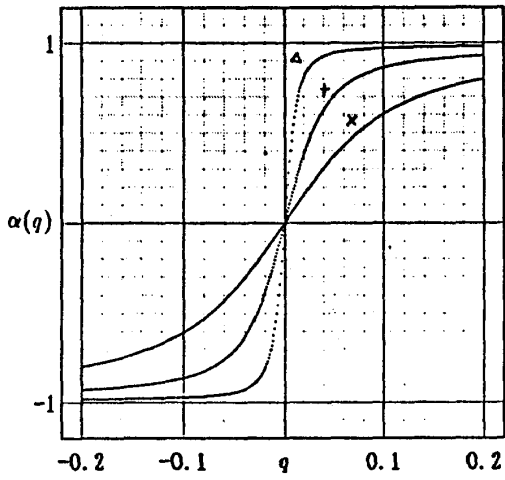


Fig. 4-a

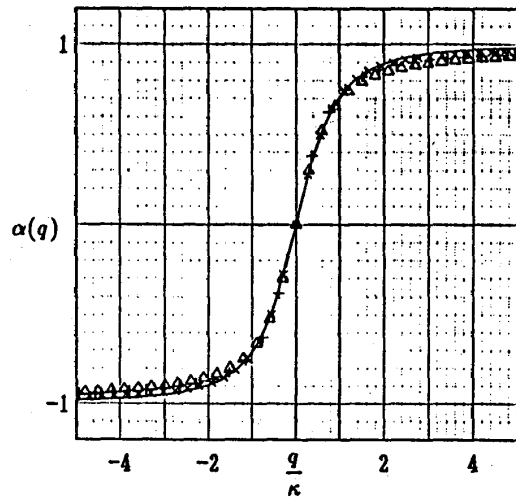


Fig. 3-b

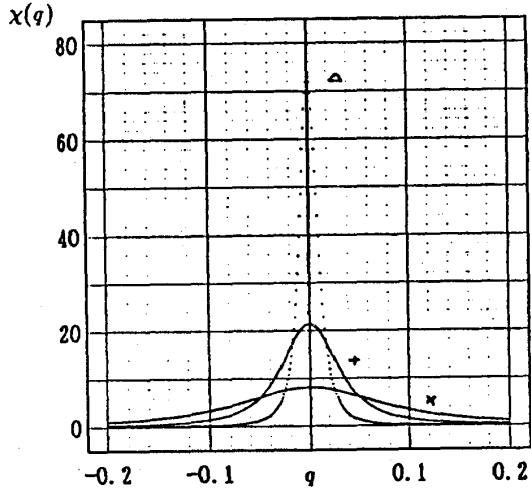


Fig. 4-b

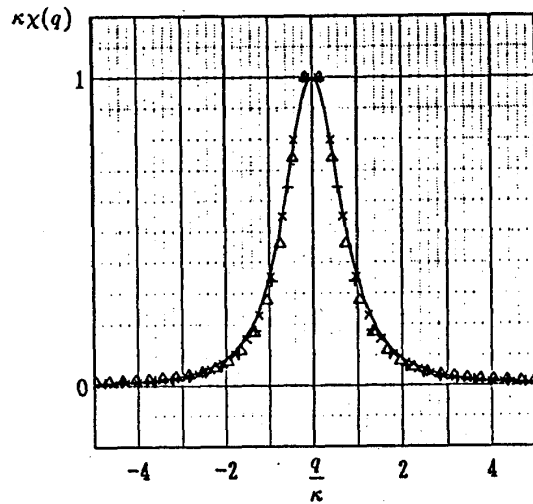


Fig. 3-c

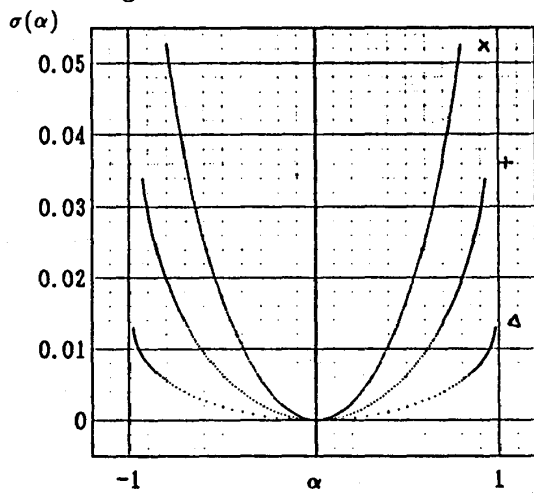
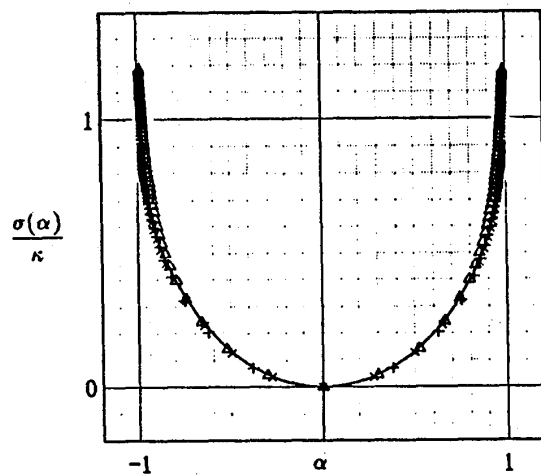


Fig. 4-c



$\Delta, +, \times$ はそれぞれ $\epsilon = \frac{A - A^*}{A} = 2.0 \times 10^{-3}, 2.0 \times 10^{-2}, 2.0 \times 10^{-1}$ である