Ｔａｃｏｎｉｓ振動における軌道拡大率のゆらぎ

熊本大教育　福島和洋
九工大工　山田知司
愛教大物理　矢崎太一

Ｔａｃｏｎｉｓ振動とは、管内のヘリウム気体に、一方が室温（～３００Ｋ）でもう一方が液体ヘリウム温度（～４Ｋ）というような急激な温度勾配が与えられた場合に起こる自励振動である。この現象は、低温物性研究者にとっては、なじみ深い現象であって、液体ヘリウム容器中のヘリウムの液面の測定に利用されている。振動が起こる条件は、高温側と低温側の温度比と管内の気体の密度によって決まる。その状態図は、理論的にはＲｏｔｔによって与えられ、[1] 矢崎らが実験でこれを確かめた。[2] 更に、矢崎らは温度比の大きな領域で、二つの振動モードの結合により準周期振動が起こり、そこからカオスが生じることを発見した。[3] 準周期振動からのカオスの発生においては回転数が黄金比 $\rho_G = (\sqrt{5}-1)/2$ の場合が重要である。実験系において、このいわゆる“臨界黄金トーラス”が実現されている例は少ない。そこで矢崎らは、Ｔａｃｏｎｉｓ振動系において、周期振動（振動数 f_G）をしている系の管の一方の端からスピーカーにより外力（振動数 f_e）を加えることによって、$f_G/f_e = \rho_G$ となるように f_e を調節し、臨界黄金トーラスを実現させた。[4] 図１に、外力の周期毎に

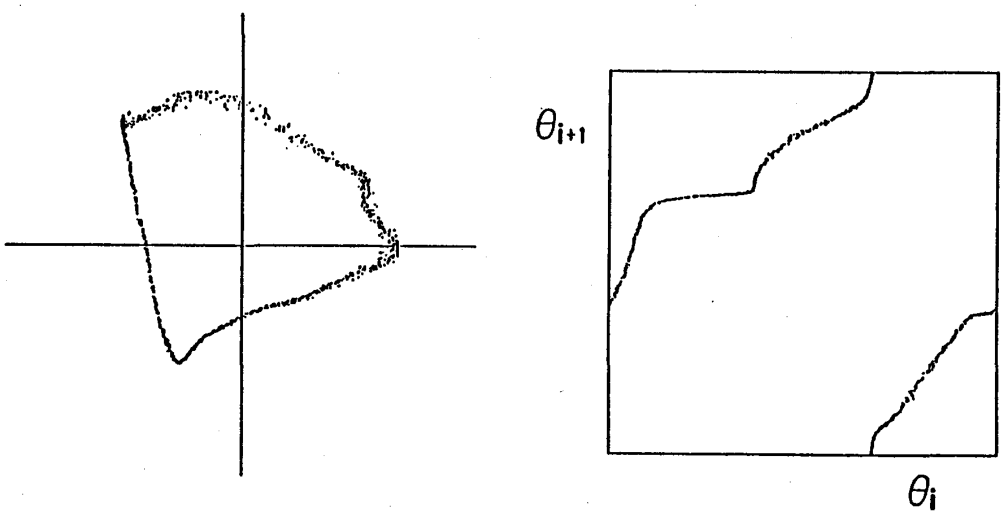


図 1

サンプリングした実験データから作ったポアンカレ断面とそれの角度に対するリターンマップを示す。

一方、アトラクターの幾何学的構造を考えるとき、軌道間の距離は、不安定多様体方向に引き伸ばされ、安定多様体方向に縮められる。従って、局所的な軌道拡大率λ_iは時間的にゆらぐ。このことに着目して、堀田らは、カオスの発生点において写像関数からλ_iのｎステップの和、

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \tag{1}$$

を計算した。その結果、サインサークルマップ（臨界黄金トーラス）においては量$\beta_n = S_n / \log n$の時系列は、フィボナッチ数のカスケードで展開され、しかも自己相似な構造をもつことが示された。[5)]

我々は、Ｔａｃｏｎｉｓ振動系において、軌道拡大率の計算を行った。実験データから軌道拡大率を計算するのに次に述べる二つの方法を用いた。

〔１〕マップ関数による方法

図１のリターンマップをサインサークルマップ関数

$$\theta_{i+1} = f(\theta_i) = \theta_i + \omega_c - \sin\theta_i \tag{2}$$

で表されるとして、局所的拡大率λ_iを

$$\lambda_i = \log | f'(\theta_i) | \tag{3}$$

として求める。

〔２〕Ｗｏｌｆの方法[6)]

ポアンカレ断面において、１点X_iをとり、これに最も近い点X'との角度をθ_iとする。時間発展により、$X_i \to X_{i+1}$，$X' \to X''$へ移る。このときX_{i+1}とX''とのなす角をθ_{i+1}とすれば、

$$\lambda_i = \log \left| \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i} \right| \tag{4}$$

となる。次のステップでの計算には、X_{i+1}に最も近い点を探してX'とする。ただし、ノイズの大きさ以内の点は除く。

このようにして計算したλ_iのｎステップの和S_nは、

$$S_n=\beta_n \log\ n+n\Lambda^{\infty} \tag{5}$$

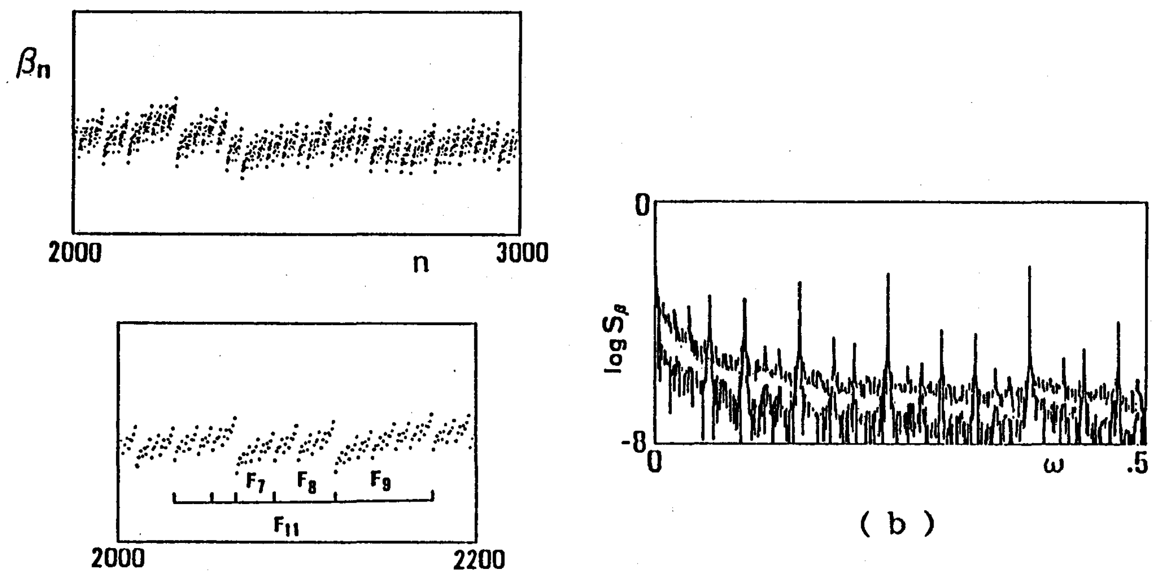
の関係にあり、Λ^{∞} はリアプノフ数である。[5] 臨界点ならばΛ^{∞} ＝０であるが実験において臨界点直上を実現するのは困難であるため、Λ ＝０となっていない。そこで、全データ（１６３８４点）から求めたΛ^{∞} を用い、

$$\beta_n=(S_n-n\Lambda^{\infty})/\log(n+1) \tag{6}$$

を求めることとした。

図２（ａ），（ｂ）に、〔１〕マップ関数による方法から得られたβ_nの時系列とそのパワースペクトラムを示す。図２（ａ）の下の図は上の図の拡大図であって、F_n はフィボナッチ数を表す。時系列はフィボナッチ数のブロックで展開され、ブロック内には更に下位のフィボナッチ数のブロックが存在することがわかる。この自己相似性は、図２（ｂ）のパワースペクトラムのピークに顕著に現れている。〔２〕Ｗｏｌｆの方法から得られた結果を同様に図３（ａ），（ｂ）に示す。図３（ａ）の時系列においては、自己相似性の明確さは少し失われるがフィボナッチ数ごとのピークは、はっきりと現れていることがわかる。このことは、図３（ｂ）のパワースペクトラムが良く表している。

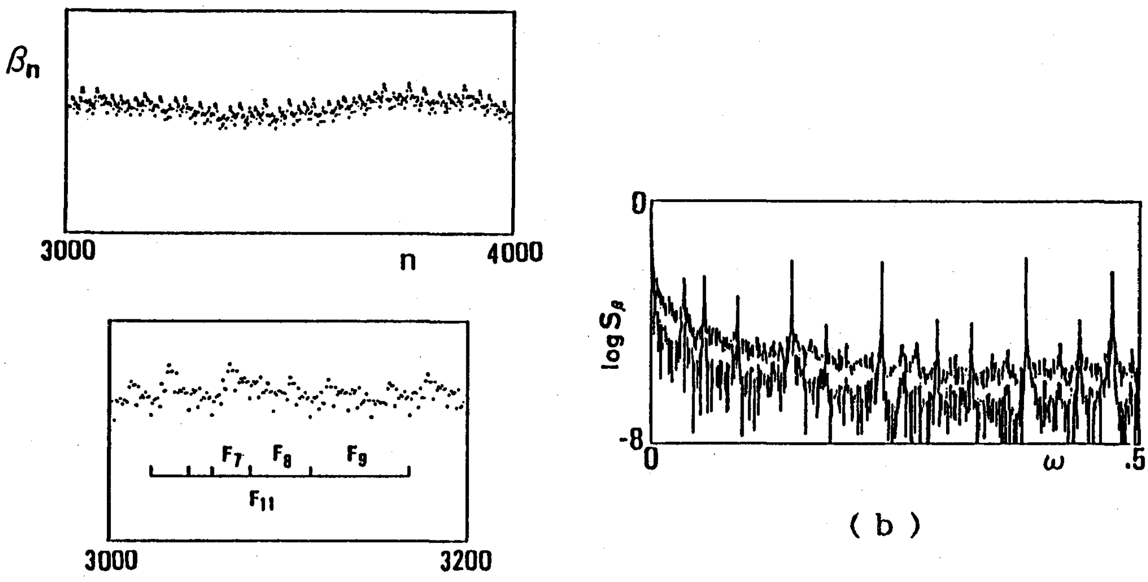
Ｔａｃｏｎｉｓ振動系で実現された臨界黄金トーラスにおいて、実験データから軌道拡大率の計算を行った結果、軌道拡大率の和を表す量β_nは、フィボナッチ数のカスケードで展開されることが確かめられた。このことは、回転数ρ_n＝



（ｂ）

（ａ）

図２



(a)　　　　図３

F_m / F_{m+1}をもつ無限個（$m = 1, 2, \cdots, \infty$）のアトラクターの融合である臨界黄金トーラスを分解することが、β_nの時系列において表現されているのであろう。

参考文献

1) N. Rott: Z. Angew. Math. Phys., 20 (1969) 230; 24 (1973) 54.

2) T. Yazaki, A. Tominaga and Y. Narahara: J. Low. Tomp. Phys., 41 (1980) 45; Phys. Lett., 79A (1980) 407.

3) T. Yazaki, S. Takashima and F. Mizutani: Phys. Rev. Lett., 58 (1987) 1108.

4) T. Yazaki, S. Sugioka, F. Mizutani and H. Mamada: Phys. Rev. Lett., 64 (1990) 2515.

5) T. Horita, H. Hata, H. Mori and K. Tomita: Prog. Theor. Phys., 81 (1989) 1073; H. Mori, H. Hata, T. Horita and T. Kobayashi: Prog. Theor. Phys. Suppl., No. 99 (1989) 1.

6) A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano: Physica, 16D (1985) 285.