マルチフラクタル解析の有限サイズ効果

神戸大 鈴木崇仁、高安秀樹　東工大 田口善弘

アブストラクト：

フラクタル及びマルチフラクタル解析は最近様々なところで使われているが、その測り方はというとlog-logプロットした点をfitさせてその直線の傾きを調べているにすぎない。このとき存在するそれぞれの点のバラツキはこの直線に吸収されてしまいデータの少しの誤差もf-αの形に重大な影響を与える。
本研究ではスケール依存性を持つf-αを白色雑音について調べそれがスケールに対して興味深いふるまいをすることを示し、システムサイズが有限な場合、f-αにどのような影響を与えるか具体的に示す。

f-αの定義：

データ列をサイズrで分割しそれぞれの重みP(r)のq乗の和の対数をrの対数で微分したものをτ(q, r)と置く。このτ(q, r)を使ってαをτ(q, r)のqについての偏微分、fをτ(q, r)の変数qを変数αにルジャンドル変換したものと定義する。

例：

まず例としてガウス分布をするホワイトノイズを考える。サイズrでのP(r)のq乗の和とrの両対数プロットを見てみる。見た感じでは全て、直線にfitするようにみえるが、定義に従って、スケール依存なf-αを求めて見るともっともらしい放物線になるがそれぞれの放物線の幅はrが大きくなるにつれて狭まっていく。rcは（データ列の分散）／（データ列の平均の自乗）。(Fig. 1, Fig. 2)

理論的な考察：

ここではx軸上のデータ列 m(x) について P(r)を次のように定義する。

$$P(r) = \frac{\sum_{x}^{\{m(x)\}_r} m(x)}{\sum_{x}^{All} m(x)} = \frac{\sum_{x}^{\{m(x)\}_r} m(x)}{M}$$

ここで $\{m(x)\}r = [m(nr), m((n+1)r)]$, $n = [0, N/r]$, Nはデータの総数
これを使ってサイズrについてのPi(r)のq乗の和は

$$\sum^{\frac{N}{r}} P^{q}(r) = \frac{1}{M^{q}} \frac{N}{r} \langle (m(1)+\cdots+m(r))^{q} \rangle$$

であるからスケール依存なτ(q, r)は

$$\tau(q,r) \equiv \frac{d \log \sum^{\frac{N}{r}} P^{q}(r)}{d \log r} = \frac{d \log \langle (m(1)+\cdots+m(r))^{q} \rangle}{d \log r} - 1$$

m(x)の分布がガウシアンであるようなホワイトノイズを考えるとm(x)が無相関であることと、m(x)の三次以上のキュムラント平均が0であるから、適当な計算によりスケール依存なf-αはqが大きくないところで、r/rc >> 1 の時次のように近似できる。

$$\alpha(q,r) \equiv \frac{\partial \tau(q,r)}{\partial q} \fallingdotseq 1-(q-\frac{1}{2})(\frac{r}{r_c})^{-1}$$

$$f(\alpha,r) \equiv \alpha(q,r)\cdot q - \tau(q,r) \fallingdotseq 1-\frac{r}{2r_c}\left(1-\alpha(q,r)+\frac{1}{2}(\frac{r}{r_c})^{-1}\right)$$

これからf−αは放物線で、r/rcの値が大きくなるに従って放物線の形が鋭くなり、頂点は (f, α) = (1, 1) に近付いて行く。(Fig. 3)

まとめ：

この様にホワイトノイズでもf−αの形がきれいな放物線としてでてしまうことがある。だからスケール依存なf−αを調べてスケールに対してf−αの形が変わらないことを確かめる必要がある。

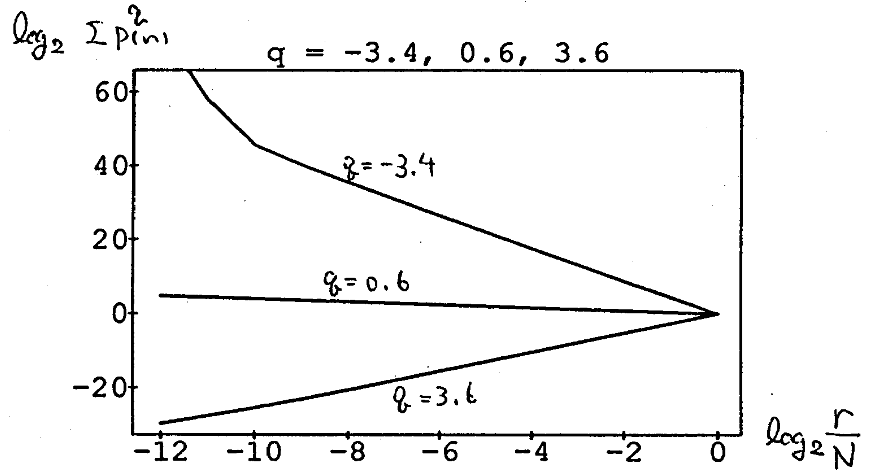

Fig.1 $\frac{r}{N}$ と $\Sigma p^q(r)$ の両対数プロット

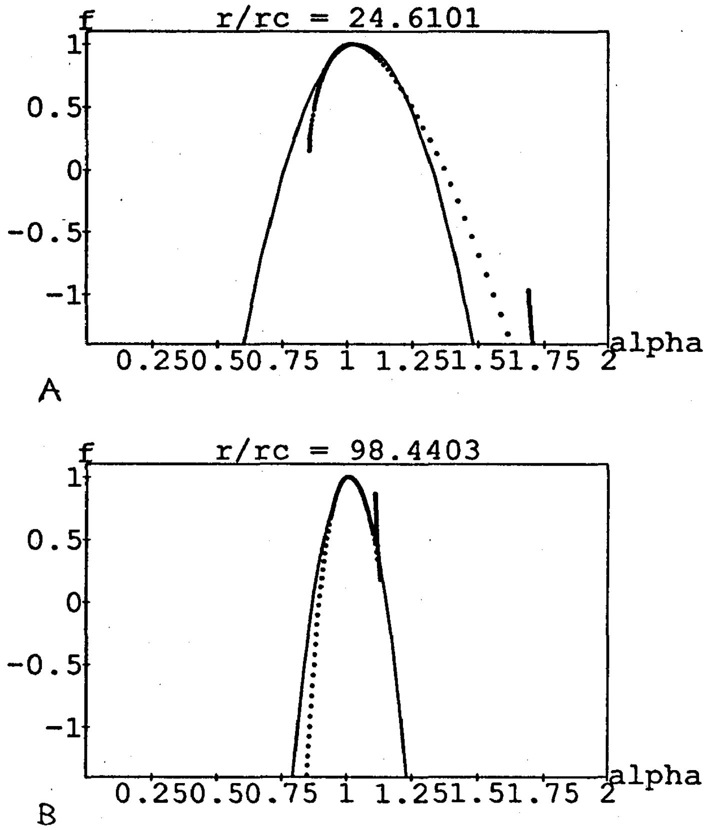
r/rc = 24.6101
f
1
0.5
0
-0.5
-1
0.25 0.5 0.75 1 1.25 1.5 1.75 2
alpha
A
r/rc = 98.4403
f
1
0.5
0
-0.5
-1
0.25 0.5 0.75 1 1.25 1.5 1.75 2
alpha
B

Fig.2

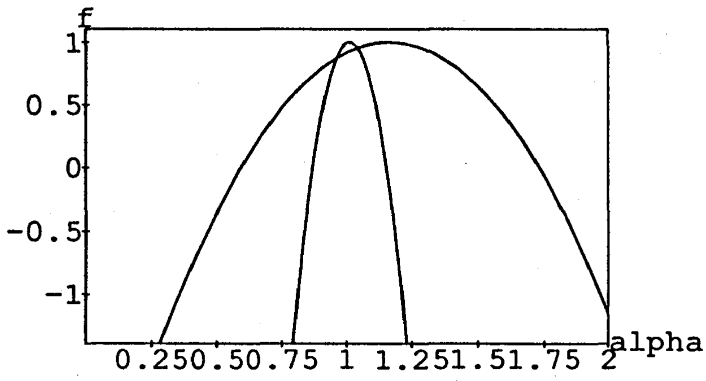
f
1
0.5
0
-0.5
-1
0.25 0.5 0.75 1 1.25 1.5 1.75 2
alpha

Fig.3