$f(\alpha)$の臨界レジームとカオスレジームのクロスオーバー

九大理，九州共立大[A]　　富永広貴，森　肇[A]

周期倍化のカスケードによるカオス発生点a_∞の直後$\epsilon \equiv |a - a_\infty|/a_\infty \ll 1$では、アトラクターは多数($M = 2^m$個)のバンドからなる。バンド間の軌道点の分布とバンド内の軌道点の分布は異なるタイプの自己相似性を示し、異なった多重フラクタルスペクトル（$f(\alpha)$スペクトル）を与える。バンド間の自己相似性は、カオス発生前の周期軌道の自己相似性と同じ相似性を持ち、バンドの数が増えるにつれて、$\epsilon = 0$におけるFeigenbaumアトラクターのスペクトル$f_\infty(\alpha)$に近づく。バンド内の自己相似性は、カオス運動を反映した$f(\alpha)$スペクトルを与える。

ここで、$f(\alpha)$スペクトルを導入しておく。アトラクター上の1点Xにおける測度$p_X(l)$(lは、Xを中心としたboxのsize)は、lに対して、$p_X(l) \sim l^{\alpha(X;l)}$とスケーリングされる。ここで、$\alpha(X;l)$は、$X$の周りの特異性を表し、特異点指数と呼ばれる。$\alpha$のアトラクター上での分布を考える。$\alpha$の確率密度$P(\alpha;l)$は、

$$P(\alpha;l) \equiv < \delta(\alpha(X;l) - \alpha) > = l^{\alpha - f(\alpha)} P(\bar{\alpha};l) \quad (\bar{\alpha} : \alpha(X;l)\text{の平均値})$$

ここで、$f(\alpha)$は、$\alpha(X;l) = \alpha$となる点Xの集合のフラクタル次元を表す。

分配関数$\chi(q,l)$を次のように導入する。

$$\chi(q,l) \equiv < p_X(l)^{q-1} > \sim \int d\alpha P(\bar{\alpha};l) l^{\alpha q - f(\alpha)}$$

ここで、$\chi(q,l) \sim l^{\tau(q)}$とスケーリングされるとして、$\tau(q)$を導入すると、Legendre変換より、

$$f(\alpha) = \alpha q - \tau(q), \quad \alpha(q) = d\tau(q)/dq$$

となり、$f(\alpha)$スペクトルは、$\chi(q,l)$とlのlog-logプロットから、$\tau(q), \alpha(q)$を通して得られる。

始めに、典型的1次元離散力学系として、logistic写像($x_{i+1} = a - x_i^2$)を考える。

さて、上述の2種類の自己相似性を捉えるために、特性長として、バンド間については、バンド間距離の最小値$l_* \propto \epsilon^\nu, (\nu \equiv \log \alpha_{\rm PD}^2 / \log \delta = 1.190732\cdots)$を、バンド内については、バンドサイズの最小値$l_b \propto \epsilon^\nu$をとり、臨界レジーム$l > l_*$(バンド間)とカオスレジーム$l < l_b$(バンド内)で、各々、$\tau(q)$, $\alpha(q)$を求め、$f(\alpha)$スペクトルを計算する。(図1に、ϵとl_*及びl_bのlog−logプロットを示す。図内の実線及び点線は、各々l_*, l_bについて、最小二乗法により求めたものである。)

理論的には、臨界レジーム$l > l_*$(バンド間)は、Feigenbaumアトラクターのスペクトル$f_\infty(\alpha)$で与えられ、カオスレジーム$l < l_b$ (バンド内)は、logistic写像の場合、写像の関数形に見られる2次性が、可算無限個（アトラクター上で測度0）の、$\alpha = 1/2$の点の集合を与えるだけで、その他の点には、特異性は無く($\alpha = 1$)、アトラクター上で測度1の集合を作っているので、$f_*(\alpha) = 2\alpha - 1, (1 \geq \alpha \geq 1/2), = -\infty, (\text{otherwise})$で与えられることが期待される。図2，図3に、その数値実験を示す(ただし$\epsilon = 0.95 \times 10^{-3}$, バンド数16)。図2は分配関数$\chi(q = 4, l)$について$\log_{10}\chi$ vs $\log_{10} l$を示したもので、$\log_{10} l \simeq -2.40$の前後で、カオスレジーム$l < l_b$から臨界レジーム$l > l_*$へクロスオーバーする。図3の左側は臨界レジームの$f(\alpha)$を、右側はカオスレジームの$f(\alpha)$を示す。臨界レジームは、バンドの数が16と小さいため、カオスレジームは、Iterationの数が不十分なため、これらの曲線はそれぞれ上述の理論曲線からかなりずれているが、2つの異質なレジームがあることを示すには十分であろう。最近、$f(\alpha)$スペクトルの実験がカオス発生点の前後で行われるようになり、[1),2)] このような、2つの$f(\alpha)$スペクトルも得られている。[1)]

次に、高次元系の場合を考える。周期倍化のカオス発生に関しては、高次元の場合も、1次元写像と同じ普遍性を持つことが知られている。よって、$f(\alpha)$スペクトルは、臨界レジームについては、先の$f_\infty(\alpha)$を与える。ところが、バンド内のカオスについては、高次元の効果が入ってきて、一般に、$f_*(\alpha) = 2\alpha - 1$を与えない。しかし、バンド数$M \to \infty$で、$f_*(\alpha)$に近づくことは期待できる。

これを、簡単な2次元写像の、Henon写像($x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + by_i$, $y_{i+1} = x_i$; $b = 0.5$)を例に取って調べる。図4がその数値実験の結果である。上から、$M = 2, 4, 8$バンドに対応する。これは、定性的な結果であって、定量的に、バンド数Mによるスケーリング則まで、得ようとすると膨大な計算量を必要とする。そこで、ここでは、粗視化された軌道拡大率の揺らぎのスペクトル$\psi(\Lambda)$及び、そのLegendre変換により得られる$\Phi(q)$, $\Lambda(q)$, $\sigma(q)$の構造関数と、$f(\alpha)$スペクトルの間に成立する関係式[3,4]を用いて、$M \to \infty$で、$f_*(\alpha)$にどのように近づくかを、理論的に考察する。ここでは、スペースがないので、$\psi(\Lambda)$等の定義は、参考文献3)を見て戴くとして省略する。

安定多様体と不安定多様体が交差した双曲点構造が、カオスに特徴的な軌道不安定性を与えるが、Henon写像の様な系では、それとは別に安定、不安定多様体が接する接点構造を持つ。これは、$f(\alpha)$及び$\psi(\Lambda)$スペクトルに、双曲相、非双曲相の2つの相を与える。

$f(\alpha)$の双曲相は、$\psi(\Lambda)$の双曲相を用いて、

$$\alpha = 1 + \Lambda/(\Lambda + R), \quad f(\alpha) = \alpha - (2 - \alpha)\psi(\Lambda)/R, \quad (R = |\log|J||, J = b(Jacobian))$$

と書ける[3,4]。また、双曲相から、非双曲相へは、

$$f(\alpha) = 3 + (\alpha - 2)q_A, \quad (\alpha_A(\text{双曲相}) > \alpha > \alpha'_A(\text{非双曲相}))$$

ここで、

$$q_A = 2 + \Phi(2)/R, \quad \alpha_A = 1 + \Lambda(2)/(\Lambda(2) + R), \quad \alpha'_A = (2\alpha_A - 1)\alpha_A/(1 + \alpha_A)$$

と傾きq_Aの直線で書ける[4]。

これらの式で、$\Lambda(q) = M^{-1}C(q)$, $\psi(\Lambda) = M^{-1}\phi(M\Lambda)$を仮定する。(図5に、$\Lambda(1)$と$\epsilon$のlog-logプロットを示した。$M \propto \epsilon^{-\log\delta/\log 2}$より、$\epsilon \propto M^{-\log 2/\log\delta} = M^{-0.4498\cdots}$となり、これは、上の仮定を満たしている。) 双曲相(α_Aも含む)で、$M(\alpha - 1)/(2 - \alpha) = const.$の線群を考えると、$M \to \infty$に対し、

$$\alpha \simeq 1 + const./M, \quad f(\alpha) \simeq 1 + \{const. - \phi(const.)\}/M$$

となり、また、これから、非双曲相は、

$$\alpha'_A \simeq 1/2 + C'/M, \quad f(\alpha'_A) \simeq 0 + C''/M$$

となり、$M \to \infty$で、$f(\alpha) \to f_*(\alpha)$が得られる。

図6に、上から$M = 4, 8, 16, 32, 64$の場合の計算結果を示す。Mが大きくなるにつれて、$f_*(\alpha) = 2\alpha - 1$に近づくのがわかる。

1)M.Mino, H.Yamazaki and K.Nakamura, Phys. Rev. B40(1989),5279-5281,

2)T.Yazaki, S.Sugioka, F.Mizutani and H.Mamada, Phys.Rev.Lett.64(1990),2515.

3)T.Morita, H.Hata, H.Mori, T.Horita and K.Tomita, Prog.Theor.Phys.79(1988),296-312,

4)E.Ott, C.Grebogi and J.A.Yorke, Phys.Lett.A135(1989),343-348,

図 1 .

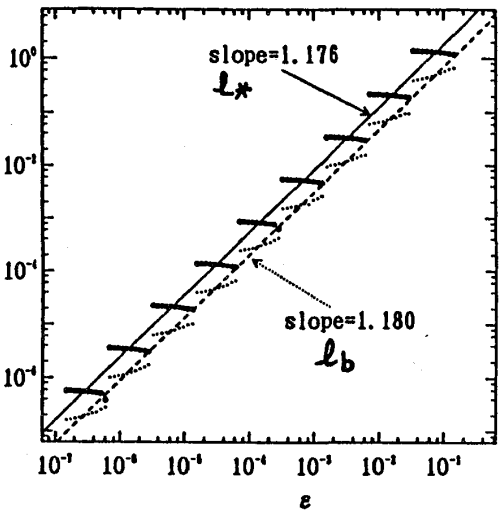

図 2 .

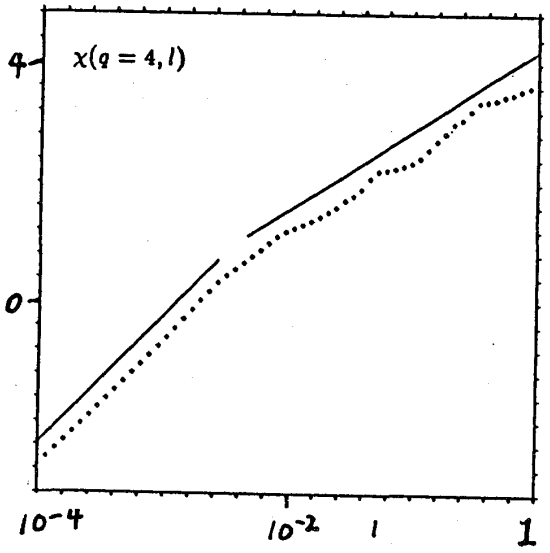

図 3 .

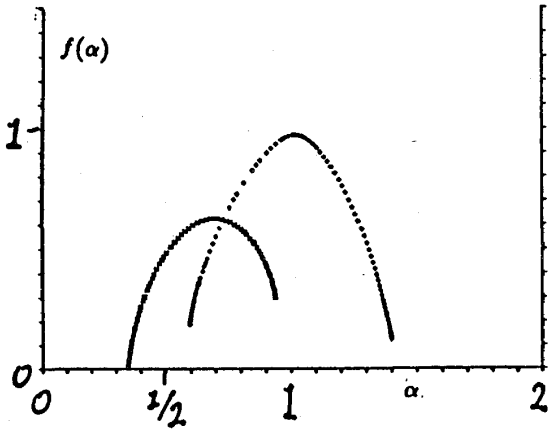

図 4 .

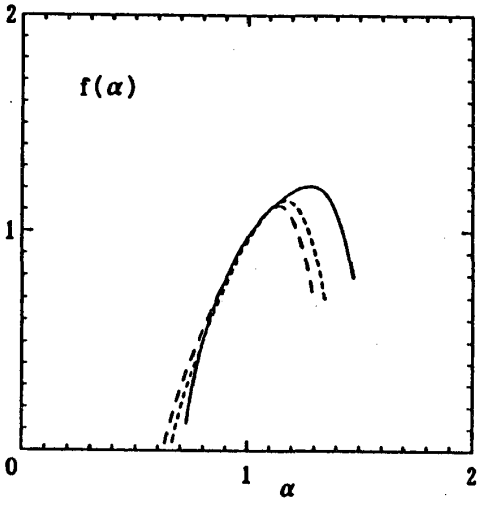

図 5 .

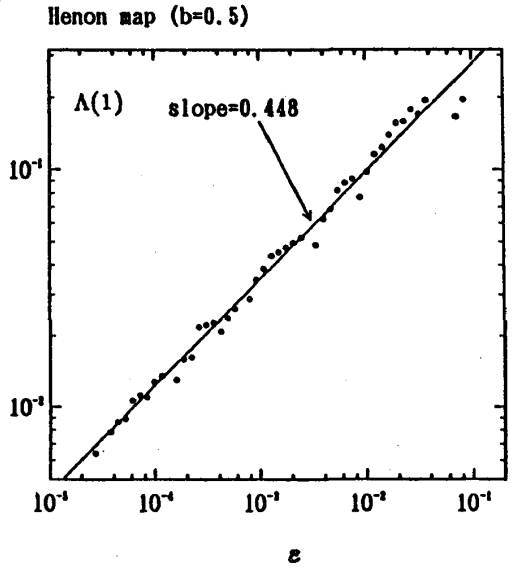

図 6 .