# 地震現象のフラクタル性と機械モデル

Fractal features of earthquake phenomenon
and its simple mechanical model.

松崎光弘（神戸大・自然科学）
高安秀樹（神戸大・理）

Abstract

地震現象をよく記述する単純な２次元機械モデルを導入する。このモデルは力学的な相転移を起こし、臨界点において地震現象に見られる種々のフラクタル性を説明する。

また、このモデルは相転移点からずれたときの挙動として、現実の地震現象に見られるような Gutenberg-Richter則からずれたマグニチュード分布なども説明する。

## Introduction

地震現象には大きく分けて以下の３つのフラクタル性が見られる。

（１）マグニチュード分布（ Gutenberg-Richter則）

マグニチュードM以上の地震の発生頻度$N(\geqq M)$は

$$\log N(\geqq M) = a - bM \qquad b \fallingdotseq 1$$

という式であらわされる。

（２）震源の空間分布がおよそ１．５次元のフラクタルとなる。

（３）地震発生時刻の２点相関がべき分布となる。

本論文では単純な素過程からなる２次元モデルを解析することによって、地震現象のもつ自己相似性の解明を試みる。

地震現象のモデル化に関しては大きく分けて２つの流れがあるといえる。１つは１回の地震を２次元格子上のパーコレーションとして扱うもので、大塚（1972）等がある。このモデルは相転移を起こし、相転移点では、クラスターのサイズ分布がべき分布になることが知られている。

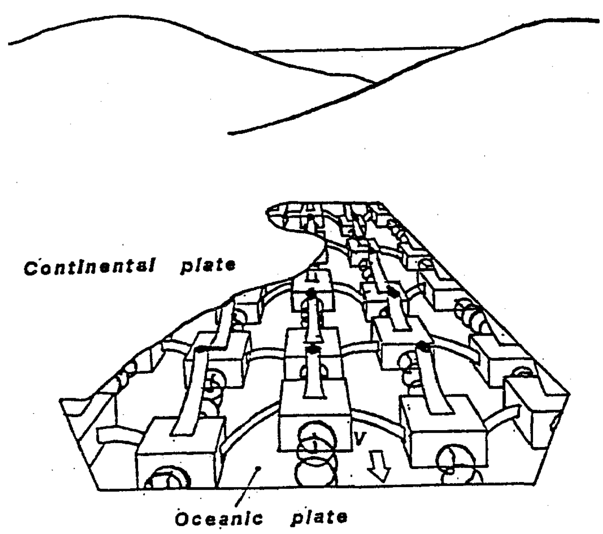
２つめの流れは地震現象を動的なモデルで取り扱うものである。これは、Knopoff（1965）に始まり高安・松崎（1988）、伊東・松崎（1990）を経て現在に至るものである。これらのモデルの基本はKnopoff（1965）にみられるStick－slipモデルであり、地震現象を断層ないしはプレート運動によって蓄積された歪みエネルギーの解放過程として扱っている。また近年は、 BakらのいうSelf organized criticalityが地震現象にも応用できることがいわれている。このことは、伊東・松崎（1990）や中西（1990）、Carlson and Langer（1989）などに反映されている。

本論文では地震現象をコントロールパラメーターをもつ相転移現象としてとらえ、臨界点上の現象として実際の地震現象に見られる自己相似性を説明するとともに、べきにのらないような地震のマグニチュード分布などを、相転移点から離れた状態として説明する。

## Stick-slip model

Fig.1にこのモデルの概念図を示す。ここでは、海洋プレートをベルトコンベアーに大陸プレートの最下部を、2次元格子上に配列し、互いにばねで連結された箱（振動子）として扱う。また、各振動子は大陸プレート上部と各々1本のばねで連結しているものとする。この図において、海洋プレートが大陸プレートの下に沈みこもうとすると、プレート間の摩擦によって大陸プレート側の振動子が引きずりこまれ、歪みエネルギーが蓄積される。各振動子にかかる歪みエネルギーが海洋プレートとの静摩擦の限界を越えるとその振動子は元の地点まで滑り、自分のもっていた歪みエネルギーを最近接の4つの振動子に、お互いをつなぐばねの強さに応じて分配する。その結果隣の振動子にかかる歪みエネルギーが静摩擦の限界を越えたならばその振動子も滑りを起こし破壊が伝播する。ここで、最初に滑りを起こした振動子の位置が地震の震源に、滑りを起こした振動子の滑った距離の和が地震のモーメントにあたる。また、滑りを起こした振動子が作るクラスターのサイズは地震の断層面積に対応する。

Fig.1




Schematic representation of two-dimensional mechanical model. The oceanic plate moves with a constant velocity *V* and oscillators make a square lattice on the surface of the oceanic plate.

このシステムのルールは以下のような式で与えられる。（ルール1）

$$\frac{d}{dt} f^{-}(i,j)=V$$

If $f^{-}(i,j) \geqq fc(i,j)$

Then $f^{+}(i,j)=0$

$$f^{+}(i\pm1,j\pm1)=f^{-}(i\pm1,j\pm1)+\frac{k}{4k+g}\,fc(i,j)$$

$f(i,j)$: the sum of spring forces of $(i,j)$th oscillator

supersprict - and + denotes "before" and "after" event

$fc(i,j)$: the threshold frictional force of $(i,j)$th oscillator

$g,k$: spring constants of leaf spring and coil spring

ここで、簡単のためにシステム中のばねの強さを一定であるとし、式を振動子とベルトコンベアーの間の静摩擦の限界（しきい値）でノーマライズすると、ルールは以下のようになる。（ルール2）

$$\frac{d}{dt}F^{-}(i,j)=v(i,j)$$

If $F^{-}(i,j)\geqq 1$

Then $F^{+}(i,j)=0$

$F^{+}(i\pm 1,j\pm 1)=F^{-}(i\pm 1,j\pm 1)+d$

$F(i,j)=f(i,j)/fc(i,j)$ , $v(i,j)=V/fc(i,j)$

$d=k/g+4k$

さらに、最近接振動子のうちどれかが同じイベントで２回以上滑りを起こさないという条件を加えると、結局このモデルのルールは

$$\frac{d}{dt}F^{-}(i,j)=v(i,j)$$

If $F^{-}(i,j)\geqq 1$

Then $F^{+}(i,j)=0$

$F^{+}(i\pm 1,j\pm 1)=F^{-}(i\pm 1,j\pm 1)+N\bullet d$

N=4/number of not-slipped neighboring oscillators

と表される。（ルール３）

本研究ではこのモデル（ルール３）について数値計算実験を行ない、その結果をフラクタルの観点から実際の地震現象と照らし合わせてみた。

Results

数値実験から得られた結果を以下にまとめる。

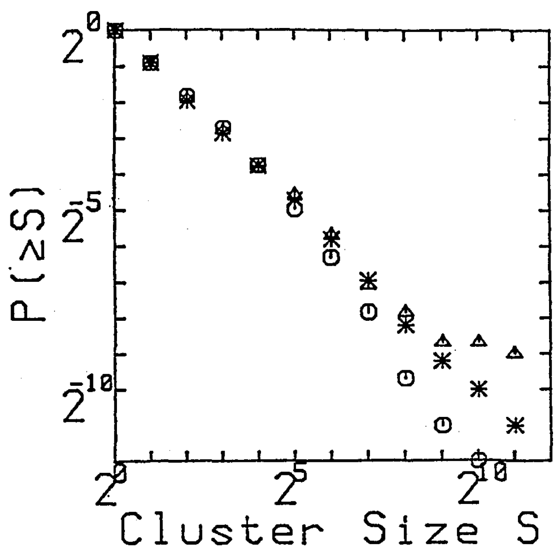
（１）このモデルはコントロールパラメーターｄの値によって力学的な相転移を起こし、相転移点のｄの値（ｄ＝0.23）はシステムのもつエネルギーの大部分が保存されることを示す。システムがコントロールパラメーターをもつという点は、 Bakらのいう Self Organized Criticality との大きな違いの一つである。

（２）ｄの値によるクラスターのサイズ分布の変化をFig.２に示す。

ｄが相転移点より大きいときには周期的に大きなクラスターが発生し、ｄが相転移点より小さいときには小さなクラスターばかりが発生して大きなクラスターの数は指数的に減少する。

ここで、クラスターサイズは地震の断

Fig.2




Cumulative distributions of the cluster size of our modified model at three typical $d$ values in log-log scale: $\Delta, d = 0.24 > d_c$; $*, d = 0.23 \approx d_c$; $[], d = 0.22 < d_c$

層面積に相当し、断層面積の対数はマグニチュードの対数と比例するので、これらの分布は、現実の地震現象においてマグニチュードと頻度の関係がべき分布からずれるような事柄に対応する。

（3）相転移点上では１回のイベントで系全体が失ったエネルギーの総和、すなわちモーメントの分布がべき分布となる。ここで、モーメントの対数が地震のマグニチュードの相当することから、この分布は地震のマグニチュードと頻度の関係を表すものといえる。

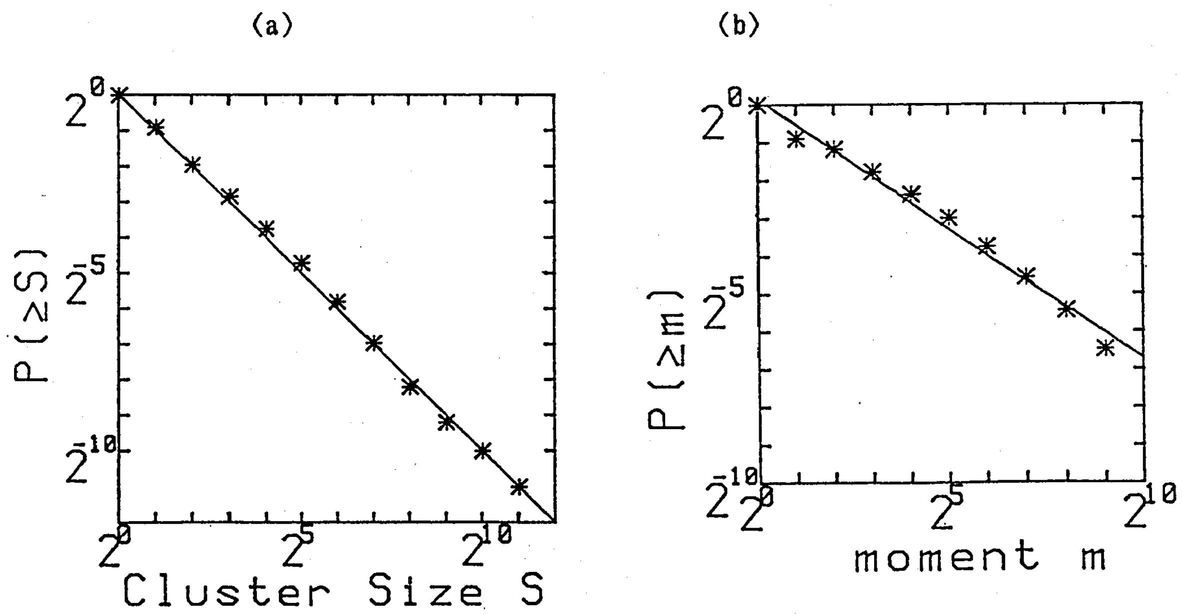
モーメントとマグニチュードの関係は

$$M = \frac{2}{3} \log m$$

のように表されるから、このモーメントの分布における指数0.67はｂ＝１とした場合のGutenberg－Richter則を満足する。

また、同時に、相転移点ではクラスターのサイズ分布もべき分布となりその指数1.01はパーコレーション問題で得られる指数とも近く、現実の地震の断層面積の頻度分布とも非常によくあう。（Fig.３）

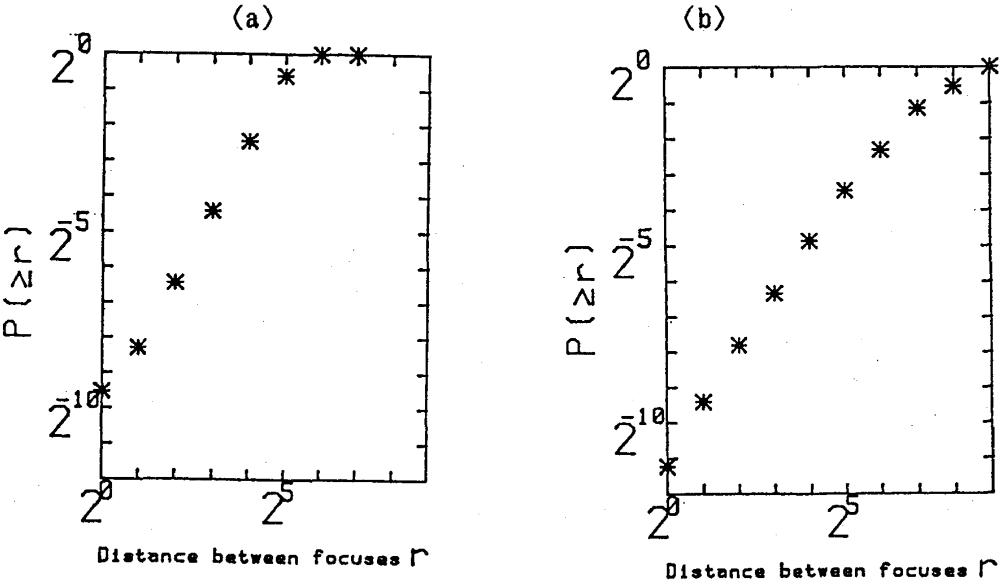
Fig.３




Cumulative distributions (a) of the cluster size and (b) of the moment of our modified model in log-log scale at the critical state. The exponent of the cluster size distribution is about 1.01, and the exponent of the moment distribution is about 0.67.

（4）相転移点上で震源の２点相関をとるとべき分布になり、その指数が実際の地震の震源分布とほぼ一致する。Fig.４に、震源間の距離がｒより小さくなる確率Ｐ（ｒ）とｒの関係を両対数グラフ上にプロットしたものを示す。(a)モデルでの分布と(b)現実の地震での分布が比較的近いことが分かる。

Fig.4




Spatial distribution of the focuses (a) of our modified model and (b) of real earthquakes.

(5) 地震の発生時刻の相関関数を

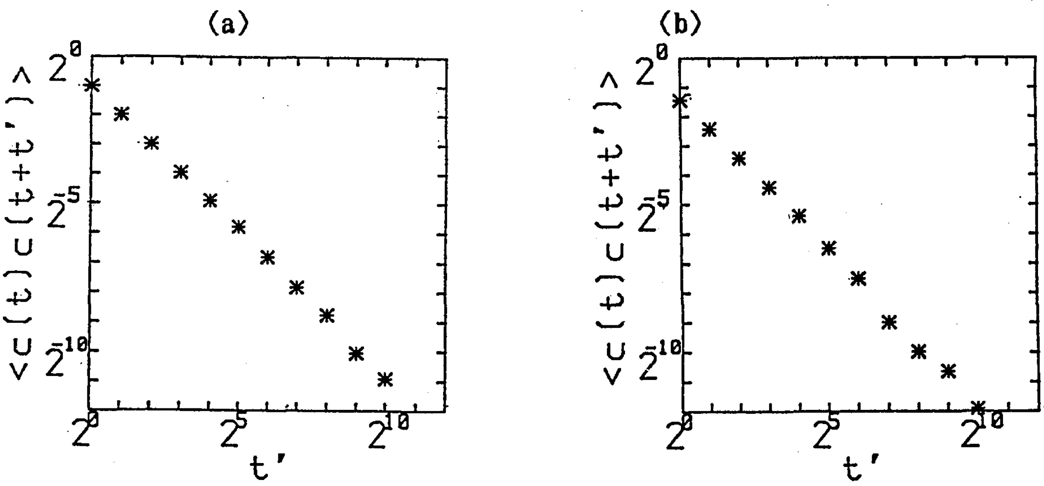
$$C(t')=\langle c(t)\,c(t+t')\rangle$$

と定義する。ここで、c(t)は時刻tに地震が発生する確率であり、<−>は平均を表す。

この相関関数の分布をFig.5に示す。

ここでも(a)モデルと(b)現実の地震のデータが非常によくあうことが分かる。

Fig.5




The temporal corelation functions (a) of our modified model and (b) of real earthquakes in log-log scale.

以上の結果より、2次元のStick-slipモデルは相転移点上の現象として、グローバルに見られる地震現象のフラクタル性を説明すると同時に、コントロールパラメーターをもたないSelf Organized Criticalityに基くモデルでは説明できない、べき分布からはずれたローカルな地震のエネルギー分布をもよく説明できるといえる。

## References

Avilles, C,A., C.H. Scholz, and J.Boatwright, Fractal analysis applied to characteristic segments of the San Andreas fault, *J.Geophys.Res.*, *92*, 331-334, 1987.

Bak, P., and C. Tang, Self organized criticality, *Phys. Today*, *42*, s27-s28, 1989.

Bak P., C. Tang, and K.Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise, *Phys. Rev. Lett.*, *59*, 381-384, 1987.

Bak, P., C. Tang, and K, Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Phys. Rev. A.*,*38*, 364-374, 1988.

Burridge, R., and L. Knopoff, Model and theoretical seismicity, *Bull. Seismo. Soc. Am.*, *57*, 341-371,1967.

Carlson, J. M., and J. S. Langer, Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, *62*, 2632-2635, 1989.

Carlson, J. M., and J. S. Langer, Mechanical model of an earthquake fault, *Phys. Rev. A*, *40*, 6470-6484, 1989.

Chen, k., P. Bak., and S. P. Obukhov, Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes, preprint

Dietrich, J. H., Time dependent friction as a possible mechanism for aftershocks, *J. Geophys. Res.*, *77*, 3771-3781, 1972

Enya, O., On aftershocks (in Japanese), *Rep. Earthquake Invest Comm. location,*, *35*, pp35- 56, 1901

Hirabayashi, T., K. Ito, and J. Kigami, "Goishi" model, revisited (in Japanese), *Jishin*, it42, 235-237, 1989

Hirata, T., Omori's power law aftershock sequences of microfracturing in rock fracture experiment, *J. Geophys. Res.*, *92*, 6215-6221, 1987.

Hirata, T., T. Sato, and K. Ito, Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, *90*, 369-374, 1987.

Ito. K., and M. Matsuzaki, Earthquake as self-organized critical phenomena *J. Geophys. Res.*, *95*, 6853-6860, 1989.

Kadanoff, L. P., S. R. Nagel, L. Wu, and S. Zhou, Scaling and university in avalanches, *Phys. Rev. A*, *39*, 6524-6537, 1989

Kagan, Y. Y., Spatial distribution of earthquakes: The three point moment function, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, *67*, 697-717, 1981.

Kagan, Y. Y., and L. Knopoff, The spatial distribution of earthquakes: The two-point correlation function, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, *62*, 303-320, 1980.

Kanamori, H., and D. L. Anderson, Theoretical basis of some empirical relations in seismology, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *65*, 1073-1095, 1975.

King, C. Y., and L. Knopoff Model seismicity: rupture parameters, stress, and energy relations, *J. Geophys. Res.*, *73*, 1399-1406, 1968.

Leath, P. L., Cluster size and boundary distribution near percolation threshold, *Phys. Rev. B*, *14*, 5046-5055, 1976.

Mandelbrot, B. B., The Fractal Geometry of Nature, 460pp., W. H. Freeman, New York., 1982.

Nakanishi, H., A cellular automaton model of earthquake with deterministic dynamics *Phys. Rev. A.*, *41*, 7086-7089, 1990.

Okubo, P. G., and K. Aki, Fractal geometry in the Sun Andreas fault system, *J. Geophys. Res.*, *92*, 345-355, 1987.

Omori, F., On the aftershock of earthquakes, *J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo*, *7*, 111-200, 1894.

Otsuka, M., A simulation of earthquake occurrence, part 1, A mechanical model (in Japanese), *Jishin*, *24*, 13-25, 1971.

Stanley, H. E., *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Clarendon, Oxford, 1971.

Stauffer, D., Scaling theory of percolation clusters, *Phys. Rep.*, *54*, 1-74, 1979.

Takayasu, H., and M. Matsuzaki, Dynamical phase transition in threshold elements, *Phys. Lett. A*, *131*, 244-247, 1988.

Takayasu, H., I. Nishikawa, and H. Tasaki, Power law distribution of aggregation systems with injection, *Phys. Rev. A*, *37*, 3110-3117, 1988.

Tang, C., and P. Bak, Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena, *Phys. Rev. Lett.*, *60*, 2347-2350, 1988a.

Tang, C., and P. Bak, Mean field theory of self-organized critical phenomena, *J. Stat. Phys.*, *51*, 797-802, 1988b.

Yoshida, A., and N. Mikami, Temporal and spatial distribution of aftershocks: A preliminary report (in Japanese), in *Mathematical Seismology*, edited by M. Saito, pp. 98-108, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 1986.