

中域的積分によるカオス解析

名大・理 石井 雅 治

1. 始めに

保存系がカオス状態に移項する原因は、摂動による一価解析的な積分面の破壊つまり大域的に系を統制する不変集合の不在という、否定的やり方で説明されてきた。

例えば Poincaré は周期解の回りで Hamilton 系

$$H = H_0(p) + \mu H_1(p, q) + \mu^2 H_2(p, q) + \dots$$

が摂動パラメーター μ に解析的に依存する一価の第一積分を H 以外に持たないことを示しこれがカオス状態つまり非可積分系に対する基本的な思考の手がかりとなっている。しかし 3 体問題などの相似不変 Hamilton 系では定義域を衝突解の回りに制限するとほとんどいつでも第一積分が十分に存在することがいえる。この存在は数論的であり μ に対する摂動論ではとらえられない。さらに μ に対するこの積分面の構造の変化が複雑な運動を生み出しているということまで主張できる。厳密な定義はあとにおくとしてもこの積分を中域的積分と呼ぶことにしよう。ここでは非等方 Kepler 問題を例にとり中域的積分を利用してカオスの解析を行う。

2. 中域的積分

点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, t に対し

$$g_\theta(x, t) = (\theta^{e_1} x_1, \theta^{e_2} x_2, \dots, \theta t) \quad (0 \neq e_i \in \mathbf{Q})$$

という変換 g_θ を相似変換と呼び、 g_θ 不変な力学系 $\frac{dx}{dt} - \lambda(x) = 0$ を相似不変系と呼ぶ。この系が特解 L ;

$L(t) = (c_1 t^{e_1}, \dots, c_n t^{e_n})$ ($c_i \in \mathbf{R}$) をもつ場合のみを考える。相似不変系の第一積分 Φ が g_θ 不変な定義域 D をもつとき Φ を中域的積分と呼ぶ。一般に D は非有界な領域であり、 D 上の積分は $g_\theta \Phi = \theta^{-r} \Phi$ という性質をもつようにとれることがわかっている。この Φ について次の定理がなりたつ。

定理 (1991, 石井)。 H を Hamiltonian, λ をそのフローとしたとき

$$K = \begin{bmatrix} e & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_n \end{bmatrix} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \Big|_{x=L(1)}, \quad g_\theta H = \theta^{-r_H}$$

とおく、 K の固有値を Kovalevskaja Exponent (= KE) と呼ぶ。 K は対角化可能であるとする。 -1 を除く KE に対し r_H 以外は非共鳴、つまり $r_i \in \text{KE}$ のとき $r_i = r_2 m_2 + r_3 m_3 + \dots + r_n m_n$ をみたす正の整数の組 m_2, \dots, m_n で $m_2 + m_3 + \dots + m_n > 1$ をみたすものが存在しない ($r_1 = -1$ とした) なら、ほとんどすべての r_i に対し系は L の回りで中域的積分 $\Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)$ をもちこれらは $g_\theta \Phi_i = \theta^{-r_i} \Phi_i$, $\text{rank} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = n-1$ をみたすようにとれる。

KE は系が L 上で非退化可積分のとき整数値をとることがわかっている。またいくつかの系では KE が虚部をもつときにカオス状の運動が数値計算により観測されたり、複素 t 面上の解がフラクタルな自然境界をもつことが知られている。

KE が虚部をもつときいったい何が起っているのか？ここで、定理が系のもつパラメータ μ のほとんどすべての値に対し中域的積分の存在を保障することを利用して $r_2 = \alpha + i\beta$, $r_3 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$) のときに積分面がどうなっているのか考察しよう。 $g_\theta \Phi_i = \theta^{-r_i} \Phi_i =$ をみたすので $\Phi_+ = \Phi_1 + \Phi_2$, $\Phi_- = i(\Phi_2 - \Phi_3)$ とおくと

$$g_\theta \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix} = \theta^{-\alpha} R(-\beta \log \theta) \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix}$$

となることがわかる。ここで R は 2 次元の回転行列とした。つまりこのとき中域上で積分面はねじれていて $\theta \rightarrow \infty$, 0 の所でそのねじれは集積しているのだ。

3. 非等方 Kepler 問題

Hamiltonian が

$$H = \frac{1}{2}(\mu P^2 + q^2) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

である非等方 Kepler 問題を考えるのだが $\mu = 1$ のとき系は角運動量が保存する可積分系 (2 体問題) なので $\mu > 1$ の場合だけを見ればよい。まず系は変換

$$g_\theta(x, y, p, q, t) = (\theta^{2/3}x, \theta^{2/3}y, \theta^{-1/3}p, \theta^{-1/3}q, \theta t)$$

で不変で特解

$$L_1 = \left(0, \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}, 0, \frac{2}{3} \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} t^{-1/3}\right), L_2 = \left(\left(\frac{9\mu}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}, 0, \frac{2}{3} \left(\frac{9\mu}{2}\right)^{1/3} t^{-1/3}, 0\right)$$

をもつ相似不変系である。 L_1, L_2 は2体衝突を表している。前の考察から中域的積分面の構造はKEを調べるだけでわかる。 $g_\theta H = \theta^{-2/3} H$ だから $r_H = 2/3$ 。 L_1 の回りのKEは-

$$1, 2/3 (= r_H), \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8(\mu - 1)}}{6}$$

となり最後の2つを $r_{2,3}$ とおくと r_2, r_3 は r_2, r_3, r_H

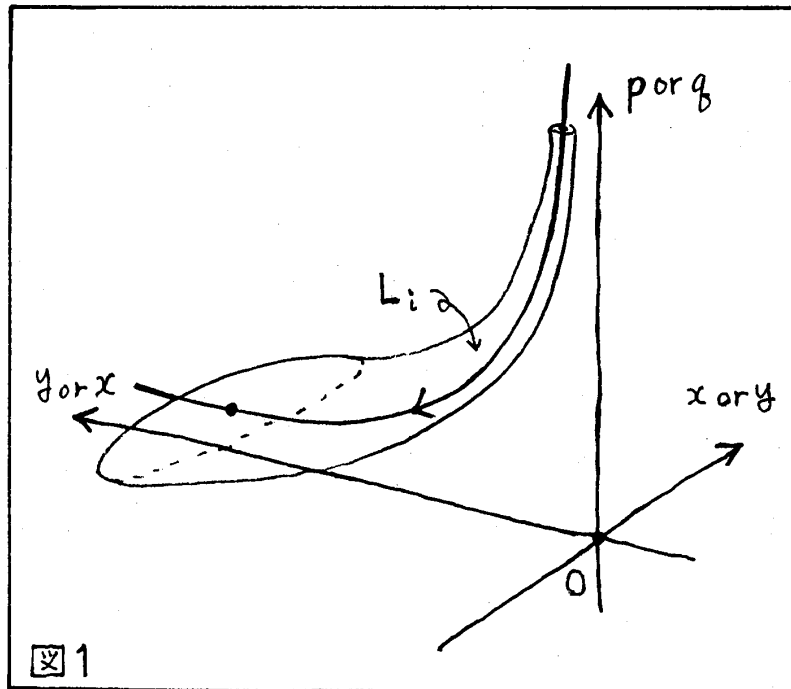
に対しほとんどすべての μ について非共鳴で、定理より $g_\theta \Phi_{2,3} = \theta^{r_{2,3}} \Phi_{2,3}$ をみたす L_1 の回りの中域的積分が存在する。 $\frac{9}{8} < \mu$ のとき $r_{2,3}$ の虚部が表れる。 L_2 の回りの -1 と r_H を除く

$$\text{KEは同様にして } r_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8(\mu^{-1} - 1)}}{6}$$

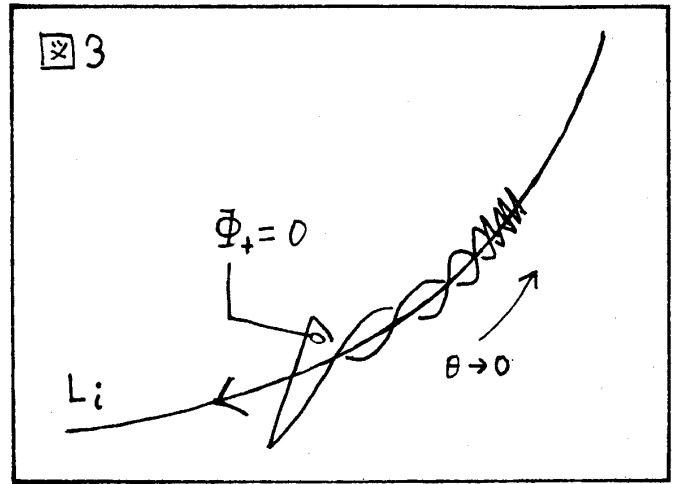
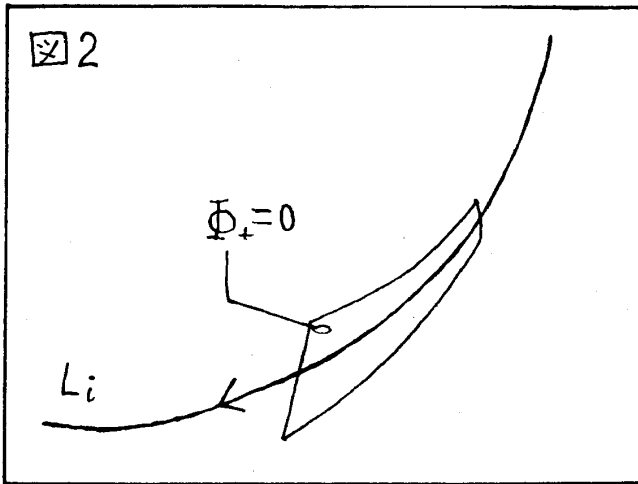
となりほとんどすべての μ について非共鳴

で、 L_2 の回りの中域的積分 $\Phi_{2,3}$ が存在するが $1 < \mu$ のとき虚部をもたない。

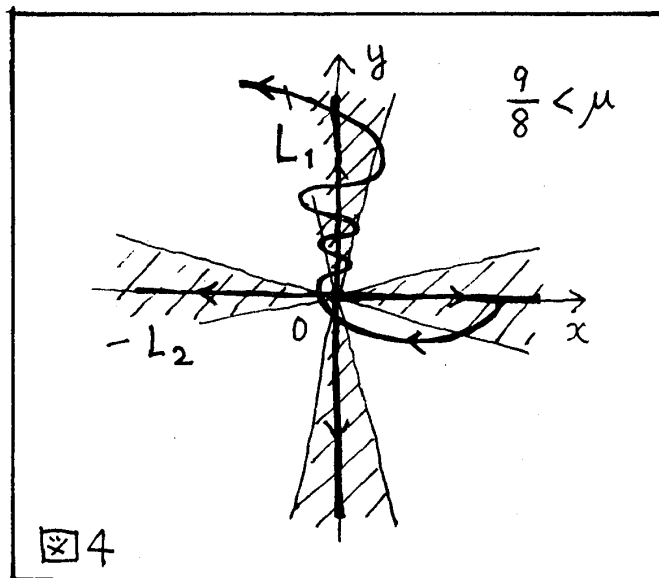
ここで積分の定義域と積分面をみてみよう。まず g_θ 不変な L_i の回りの中域は図1の L_i をとり囲む部分である。



L_2 の回りでは $1 < \mu$ より図2のような積分面が存在する。 L_1 の回りでは $1 < \mu < \frac{9}{8}$ のとき図2の積分面で $\frac{9}{8} < \mu$ のとき



虚部が表れるから図3のように面がねじれてしまう。 $\theta \rightarrow 0$ のときねじれが集積する。以上をまとめる。 $\mu < \frac{9}{8}$ のとき L_1 , L_2 の回りにはねじれの無い中域的積分面が存在しており、数値計算でも通常の振るまいを示すことが知られている。 $\frac{9}{8} < \mu$ のとき図4の L_2 の回りの中域はねじれがなく L_1 の中域はねじれた積分面が存在する。図中の曲線部分は数値計算の結果で運動はカオス的であることが知られている。このとき積分面はねじれの有る領域とない領域がなんらかの状態につながっているので複雑になっている。 $H < 0$ の場合、運動は有界となり L_1 の回りを何度も通過することがカオスを生み出していると考えられる。



以上の考察は非等方 Kepler 問題に限らず定理の前提をみたし KE に虚部をもつものに対して一般に成り立つ。