

Title	2次元写像における安定多様体と不安定多様体のふるまい (カオスとその周辺, 研究会報告)
Author(s)	山口, 喜博; 谷川, 清隆
Citation	物性研究 (1991), 56(2): 120-122
Issue Date	1991-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94538
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

2次元写像における 安定多様体と不安定多様体のふるまい¹

山口喜博（帝京技術科学大学），谷川清隆（国立天文台）

2次元写像で記述される力学系を考え、安定多様体と不安定多様体がホモクリニック交差、接触、または漸近的な接触をしているときの構造を調べた。特にこれらの場合に不安定多様体がフラクタル的な構造を持つことを示した。

1. 逆写像が存在する2次元写像 $T_\mu(X, Y)$

我々は逆写像が存在する2次元写像

$T_\mu(X, Y) : X_{n+1} = F_\mu(X_n, Y_n), Y_{n+1} = G_\mu(X_n, Y_n)$,
を考える。ここで μ はパラメータのセットで、関数 F, G は X, Y について C^1 級であるとする。変換のヤコビアン $J(X, Y) = \text{Det } DT_\mu(X, Y)$ である。ここで扱うシステムは散逸系($0 < J(X, Y) < 1$)であるとする。以下では $\mu = \mu_c$ で最初の直接的な接触、または最初の漸近的な接触が起るとする。つまり $\mu < \mu_c$ では交差、接触はなく、 $\mu > \mu_c$ では交差が存在する。 $\mu = \mu_c$ にあるとする。以下この添字は省略する。

2. 定理と証明

<定理> 2次元写像 $T(X, Y)$ に対して、不安多様体 $W^u(O)$ 上の任意の点 q の近傍 $U_\varepsilon(q)$ 内に q を含む不安多様体の弧 $w^u(q)$ 以外の不安多様体の弧が次の3つの場合に存在する。

1. ホモクリニック交差 (Palisの λ -lemma),
2. 最初の直接的なホモクリニック接触、
3. 最初の漸近的なホモクリニック接触。

<証明> 1のケースは参考文献(2)を見られたし。ここでは3のケースを証明する。2の場合も同様に証明できる。周期 n のサドルの一つを $u_1 = (0, 0)$ と記す。 u_1 の近傍 V (オーダー ε_0) 内では Hartman-Grobman の定理より適当な変換 Φ で対角化できる (図1参照)。その結果我々は、 X 軸を安定多様体に、 Y 軸を不安定多様体にとる。変換 Φ によって $T^n(X, Y)$ は

$T^n(X, Y) = (\lambda_s X + \phi_s(X, Y), \lambda_u Y + \phi_u(X, Y))$,
ただし $1/\lambda_s > 1, \lambda_u > 1, \phi_s(0, 0) = \phi_u(0, 0) = 0$,

$$\partial\phi_{s,u}(0, 0) / \partial X = \partial\phi_{s,u}(0, 0) / \partial Y = 0$$

$$\partial\phi_s(X, Y) / \partial Y |_{x=0} = 0, \quad \partial\phi_u(X, Y) / \partial X |_{y=0} = 0.$$

V 内の X 軸上の点 Q において不安定多様体が漸近接触をしているとすると、不安定多様体上の点で Q に集積する点列 Q_i をとれる (図1参照)。以後 Q_i の運動に注目する。

初期値を $X_0 = X(Q_i) - X(Q), Y_0 = Y(Q_i) - Y(Q)$ ($X_0, Y_0 \ll 1$) とし、以下では n_j を j と、 n_{j+1} を $j+1$ と略す。 V 内での写像関数は

$$X_{j+1} = \lambda_s X_j + [\partial\phi_s(X_j(Q), 0) / \partial X] X_j + [\partial\phi_s(X_j(Q), 0) / \partial Y] Y_j,$$

$$Y_{j+1} = \lambda_u Y_j + [\partial\phi_u(X_j(Q), 0) / \partial Y] Y_j.$$

ここで非線形項の中で最も大きな項のオーダーを k とする。 V 内の Y 軸上に任意の点 P

をとりその近傍（オーダー δ ）をとる。問題はこの近傍に軌道が入るかどうかである（図1参照）。入るための条件は

X方向： $0 < X_j(Q) + X_j < \delta$. ただし $X_j(Q) = \lambda_s^j X(Q) \ll 1$ であるので無視できて、条件は $0 < X_j < \delta$ である。

Y方向： $\delta_y - \delta < Y_j < \delta_y + \delta$. よって $Y_j \simeq \delta_y$.

V内での写像関数と上記の条件より軌道が点Pに近づける最小値 δ_{MIN} が得られる。

$\delta_{MIN} = O(k \delta_y / (\lambda_u - \lambda_s))$ (注意： $\delta_y = O(\epsilon_0)$).

ここで $k < (1 - \lambda_s / \lambda_u)^2$ を満たすようにkをとる。これは $k = O(\epsilon_0) < (1 - \lambda_s / \lambda_u)^2 < 1$ を満たすような小さなVを用意することを意味する。よって $\delta_{MIN} < O(\epsilon_0 \Lambda / \lambda_u) < O(\epsilon_0)$. ($\Lambda = 1 - \lambda_s / \lambda_u$).

つぎにVの大きさとしてX軸方向の大きさを δ_{MIN} 程度にとり同じ議論を繰り返すことができる。そして新たな δ_{MIN} を順次きめることができる。最初の δ_{MIN} を $\delta_{MIN}^{(1)}$ と書くとm回繰り返した後は $\delta_{MIN}^{(m)} < O(\epsilon_0 (\Lambda / \lambda_u)^m)$ となり、 $m \rightarrow \infty$ とすると、 $\delta_{MIN}^{(m)} \rightarrow 0$ を得る。これによって”V内のY軸の任意の点の近傍には不安定多様体の弧が存在する”事が示された。つぎに”不安定多様体の任意の点の近傍には不安定多様体の弧が存在する”に拡張する。図2に示したように不安定多様体の任意の点qの近傍には不安定多様体の弧が存在しないと。ところが逆写像を何回か行くと $T^{-m}q$ はV内に入る（mは正の整数）。よって $T^{-m}q$ の周りに不安定多様体の弧が存在しない近傍 $U \epsilon'(T^{-m}q)$ をとることができる。これは上の結果に矛盾する。（証明終り）

我々の示した定理は3つのケースにおいて、不安定多様体がフラクタル構造をもっている事を示している。すなわち不安定多様体をいくら拡大しても微細構造が次から次に見えてくる事を示している。この事はモデルを使用した数値計算でも簡単に見ることができる。

最後に漸近的な接触の例を図3に示す

参考文献 1. Y.Yamguchi and K.Tanikawa (submitted to J.Math.Phys.)
2. J.Palis,Topology 8,385(1969).

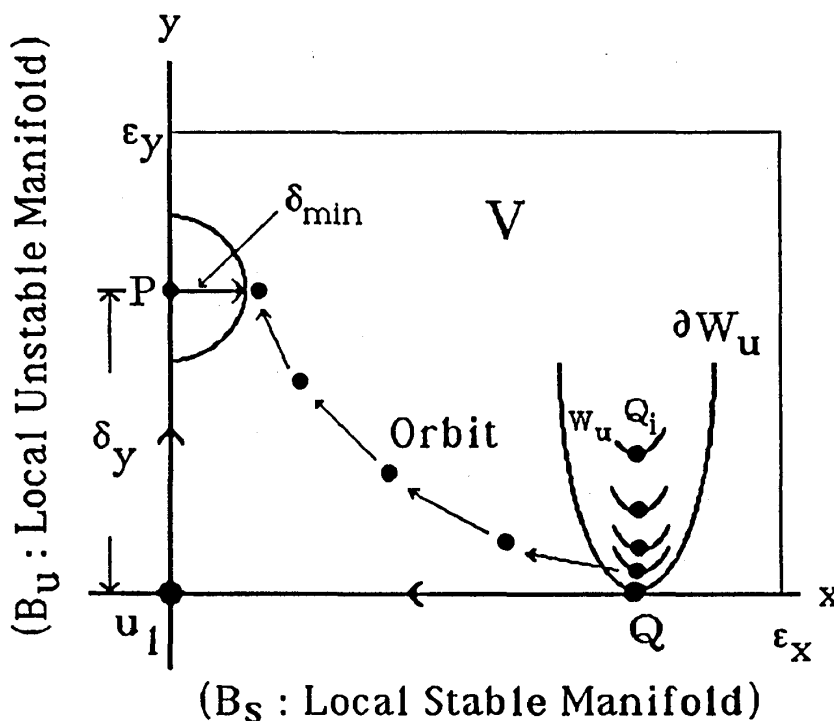


図1
 B_s, B_u はV内での安定並びに不安定多様体。
 ϵ_x, ϵ_y は $O(\epsilon_0)$ 。
 W_u が W_u に集積している。ここではPに最近接する軌道が描かれている。

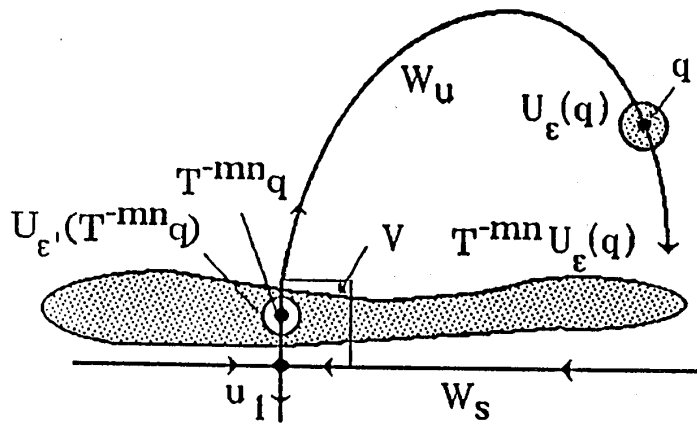


図2
 q の近傍 $U_\epsilon(q)$ を逆写像したものが $T^{-mn}U_\epsilon(q)$ で、一部が V 内に入っている。

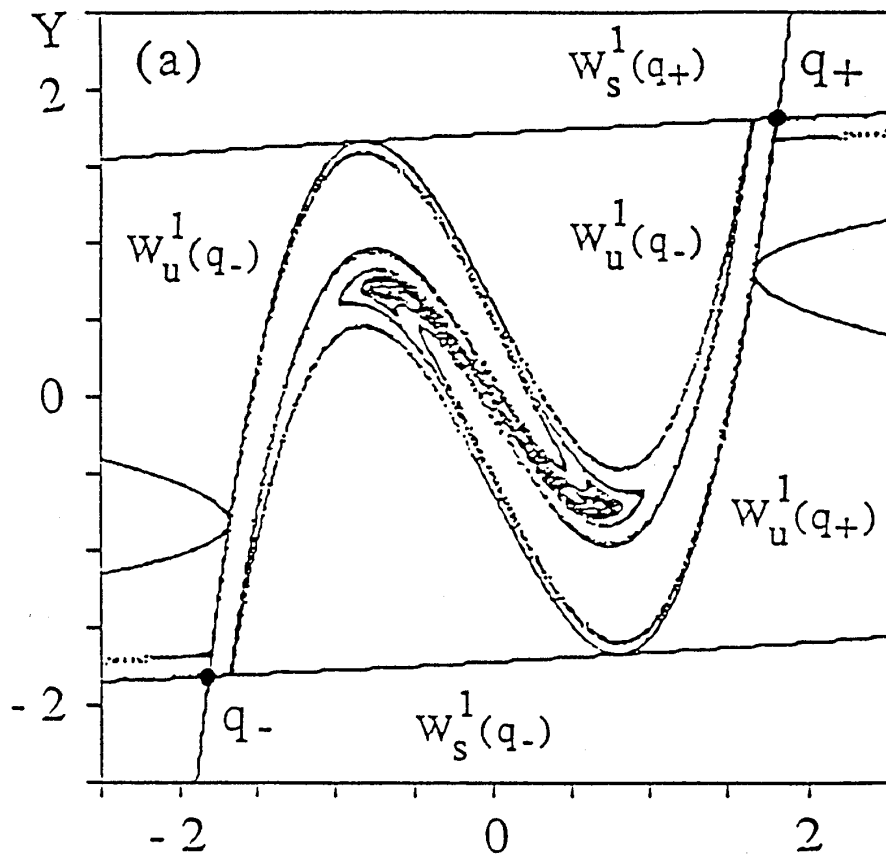


図3

用いた写像は $X_{n+1} = Y_n$ 、 $Y_{n+1} = -aY_n + Y_n^3 - JX_n$: $J=0.4$, $a=1.8863$ 。 $W_u^1(q_-)$ ($W_u^1(q_+)$)が $W_u^1(q_+)$ ($W_u^1(q_-)$)に集積している。そして $W_u^1(q_+)$ が $W_s^1(q_-)$ に接触し、 $W_u^1(q_-)$ が $W_s^1(q_+)$ に接触している。