Title	保存系でのカオスとトーラスの共存と局所的ゆらぎのスケーリング(カオスとその周辺,研究会報告)
Author(s)	小林, 達治; 堀田, 武彦; 石崎, 龍二; 森, 肇
Citation	物性研究 (1991), 56(2): 112-113
Issue Date	1991-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94541
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

保存系でのカオスとトーラスの共存と局所的ゆらぎのスケーリング

九大理、九州共立大[A]
小林達治、堀田武彦、石崎龍二、森肇[A]

カオス軌道は軌道不安定性により相関が指数関数的に減衰する。ところが、保存系のカオスはトーラスと共存しているため、カオス軌道がトーラスの近傍を通るとき、比較的軌道不安定性の小さい部分が存在している。このため、散逸系に比べて、平均量の収束が遅く、平均量を正確に決めることが難しくなる。実際、標準写像

$$\begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ J_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_t + J_{t+1}, \quad (\mathrm{mod}\ 1) \\ J_t - (K/2\pi)\sin(2\pi\theta_t) \end{bmatrix},$$

について、二次回転数を求めると、図1のように、$K < K_c = 0.972\cdots$) では長時間平均がなかなか収束しない。このようなK_cの前後での違いに本質的に効いてくるものが何かを探ることが一つの目的である。

そこでまず、再帰時間の分布の振る舞いを考える。双曲点を中心とした円形領域に対して、その領域を飛び出してから最初に戻ってくるまでの再帰時間τの分布 $f(\tau)$ を、図2にしめす。(a)は、$K < K_c$の場合 ($K = 0.8, 0.94.0.97, 1.0$) であり、$f(\tau)$ の長時間振る舞いは、べき的である。そのべき指数は-2 に近い値を示す。他方、$K > K_c$ の場合、J方向の拡散が生じるため、べき的な分布をするが指数は拡散を反映した-1.5 となる。今回は、拡散以外の寄与を見るために、J方向にも mod をとり、トーラスのまわりの寄与を観測する。図2(b)に $K = 3.86$ を図2(c)に K_cより上の場合 ($K = 1.0, 1.2, 1.5, 2.0, 3.86, 6.9115$) をまとめて示す。(c)によると、$K_c$から離れるに従い、$\tau$の短いところでべき指数が変化している。

次に、粗視化の時間nを変えた時のゆらぎの変化を調べる。今回は、カオス軌道の (0,0) の楕円点の周りでの時間 n の間の回転角 R_nを扱う。この量は R_n/n が $n \to \infty$ で楕円点に対する二次回転数となる。また、トーラスに捕まっている間は、そのトーラスの回転数をとるから、捕まるトーラスの性質(特に、この楕円点のまわりのトーラスの最も外側の構造)を反映している。ここで、分散 $< \{R_n - < R_n >\}^2 > \propto n^\zeta$ について指数ζを決定する。ただし、$< \cdots >$は位相平均をとる。実際に、双曲点の近傍に 10^5個の初期点を取った場合、$K = 0.97$ で$\zeta = 1.8$ 、$K = 3.86$ で$\zeta = 1.2$ となり、$K > 5$ では$\zeta = 1.0$ となった。このことは、(0,0) のまわりのトーラスの存在によるカオス軌道の影響を示している。

最後に、ゆらぎの確率分布に着目する。粗視化の時間 n を有限のままにすると、$\rho_n \equiv R_n/n$ は様々な値を取る。そこで、ある値ρを取る確率 $P(\rho; n)$ の n に対する変化を考える。まず、

$$P(\rho; n) = P(\rho_\infty; n)\exp(-n\psi_n(\rho))$$

とスケーリングする。図3に $K = 3.86$ のときの$\psi_n(\rho)$ をしめす。n を $800, 1600, 3200, 6400$ と増やしていくと、$\psi_n(\rho)$ の右側は下がっていく。$n \to \infty$ ではこの部分は$\psi_n(\rho) = 0$ となることが期待される。また、右端のρは楕円点のまわりのトーラスの回転数に対応するから、この部分はトーラスの近傍を通る軌道に対応する。$\psi_n(\rho) = 0$ の部分では $P(\rho; n)$ が n に対して、次の段階として、べき的減衰を考える。図4に $K = 3.86$ に対する

$$P(\rho; n) = n^\delta g(\hat{\rho} n^\delta)$$

のスケーリングを示す。ただし、$\delta = (2-\zeta)/(3-\zeta)$ を使った。

上の三つの方法はお互いに関係している。(Feller は再帰時間分布から、再帰回数の平均、分散、確率分布を議論している。) また、べき的振る舞いはトーラス近傍での構造によるものと考えられ、分散で現れた指数ζは着目したトーラスの中で最も大きな指数をとる。このため、着目するトーラスが異なる観測量を取れば、異なるζを取る。

図 1

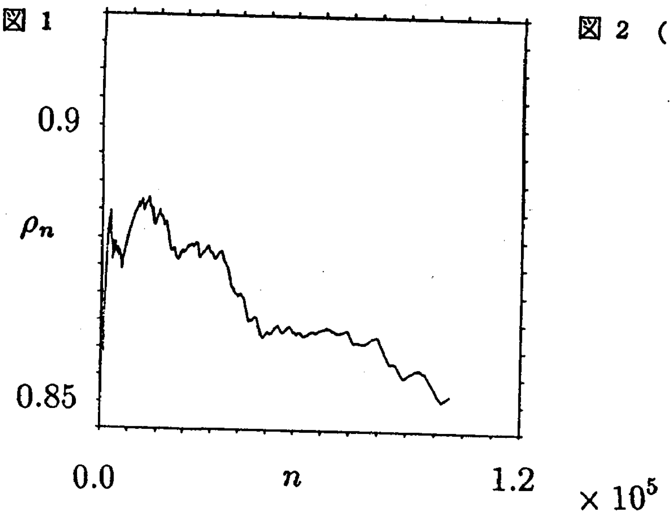

図 2 （ b ）

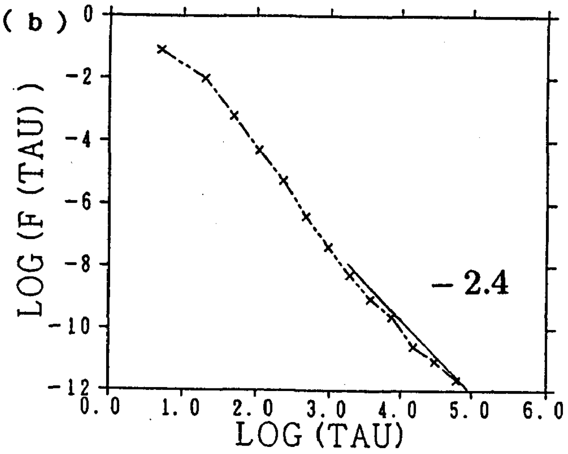

図 2 （ a ）

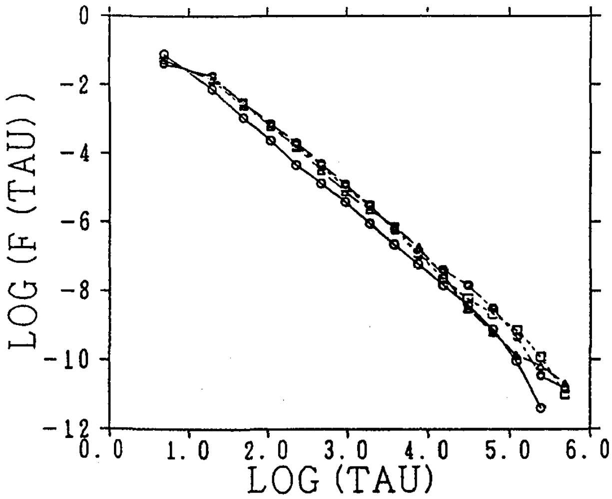

図 2 （ c ）

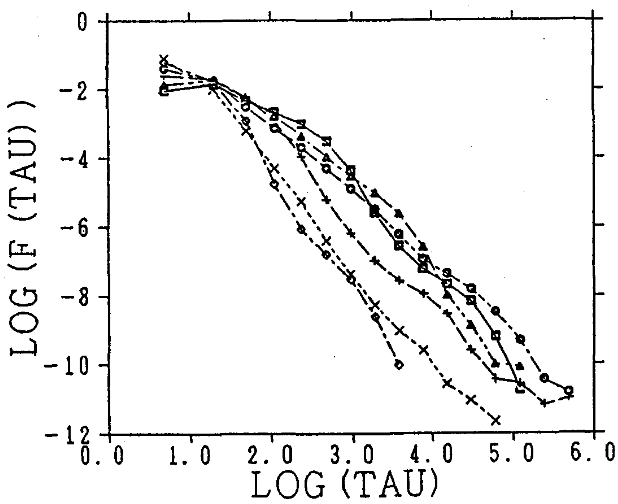

図 3

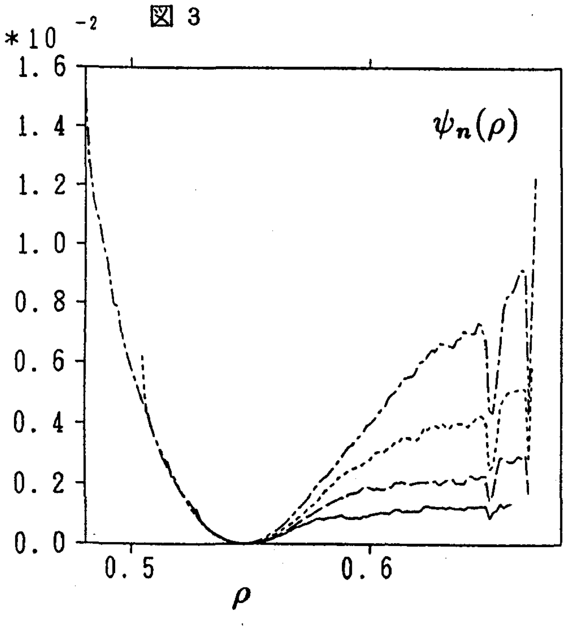

図 4