

## Rayleigh-Bénard 対流における Hamilton カオス、特にその accelerator mode について

九大理 大内克哉, 堀田 武彦, 森 肇

可積分系に周期外力を加えると、多くの場合非可積分系になることは、よく知られており、いわゆる 1.5 自由度系のカオスと呼ばれている。2 次元的な流体系の passive 粒子の運動は、 $\Psi(x, z, t)$  を時間に依存する流れ関数とすると、

$$\dot{x} = -\partial\Psi(x, z, t)/\partial z, \dot{z} = \partial\Psi(x, z, t)/\partial x$$

と表される。これは、 $\Psi(x, z, t)$  を Hamiltonian とみなした時の Hamilton 力学系と等価であり、上で述べたように、Passive 粒子がカオス的な運動を行い、Lagrange 乱流と呼ばれている。

ここでは、流体系として、平行平板にはさまれた液層を下から熱し、上下に温度勾配を与えたとき、それがある臨海点  $\Delta T_c$  を越えたところで生じる cell 状の Roll、いわゆる Reileigh-Bénard 対流系を扱う。  $\Delta T > \Delta T_c$  の領域では、流れ関数は、Boussinesq 近似を施した Navier-Stokes 方程式を厳密に解く事ができ、

$$\Psi_0(x, z) = (A/\pi) \sin(\pi x) W(z)$$

( $W(z)$  は rigid boundary 条件を満たすような関数) のように表される。ここで  $\Delta T$  を更に上げていくと、ある Prandtl 数の範囲では流線が周期的に振動する、いわゆる oscillatory instability が生ずる。この状態のモデルとして  $\Psi(x, z, t) = \Psi_0(x + B \sin(2\pi t), z, t)$  という定常流の厳密解に  $\sin$  振動項をつけ加えたものを使う。  $B > 0$  とすると broad-band-Chaos 領域が形成されここでは流体粒子が拡散を始める。ここではその領域について 2 つの特性を報告する。

まず、この領域の粒子について粗視化された局所拡大率の分布スペクトルの計算及びその解析を行った。  $x_0$  における局所拡大率を  $\lambda(x_0)$  とすると、粗視化された局所拡大率  $\Lambda_n(x_0)$  は、  $\Lambda_n(x_0) \equiv (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(x_i)$  で定義される。その時  $\Lambda_n(x_0)$  が  $\Lambda$  の値をとる確率  $P(\Lambda, n)$  は、  $P(\Lambda, n) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \delta(\Lambda_n(x_i) - \Lambda)$  で求められ、  $\Lambda$  の分布スペクトルは、

$$\psi(\Lambda) \equiv - \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log(P(\Lambda; n)/P(\Lambda^\infty; n))$$

で定義される。  $\psi(\Lambda)$  は  $\lambda(x_i)$  が中心極限定理を満たすときには  $\Lambda$  の 2 次関数になるような量で、  $\Lambda$  の long lence correlation による large fluctuation を取り出すための物理量である。図 1 は  $B = 0.001$  での  $n = 50, 100, 400, 1000$  と変えたときの  $\psi_n(\Lambda)$  で、  $n \rightarrow \infty$  の極限では  $\psi_\infty(\Lambda)$  は図 2 のような漸近形になる事が推定される。  $\psi_\infty(\Lambda)$  には  $0 < \Lambda < \Lambda^\infty$  ( $\Lambda^\infty$ : Liapnov 数) で slope = 0 の linear part が存在する。これは次のようにして簡単に理解できる。 Hamilton 力学系ではカオスとトーラスが共存し、その境界は淀み領域と呼ばれ、そこに粒子が滞在する時間分布はべき的になる。今  $\tau$  時間滞在する時間分布を  $P(\tau) \sim \tau^{-1-\beta}$  とするとトーラスの近くでは  $\lambda(x_i) \sim 0$  より、  $P(0, n)$  を求めることができ

$$P(0, n) \propto \int_n^\infty \tau P(\tau) d\tau \propto n^{1-\beta}$$

となる。これより上で述べた定義より

$$\psi(0) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \log P(0, n)/n \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \log n/n \rightarrow 0$$

となり、slope = 0 の linear part ができる。 $\Lambda < 0$  の領域では slope = -2 の linear part が存在する。これは不安定多様体と安定多様体の homoclinic-heteroclinic-tangency によって説明されるが、これについては、共同研究者の堀田氏の報告に、詳しく解説が載っている。これと同様な  $\psi(\Lambda)$  は、standard map でも得られており、Hamilton 力学系の普遍的な性質を表すものと思われる。

次にこの系の accelerator mode の存在について述べる。以前 broad-band Chaos 領域中の流体粒子に対する拡散係数  $D$  の  $B$  依存性について述べたが、その時いくつかの fine-grained peak が存在する事を示していた。その様子が standard map と似ている事から peak のある  $B$  領域を更に詳しく調べると図3のような accelerator mode が存在する事が分かった。粒子 ensemble の broad-band 方向の変位分散  $\langle (x_n - x_0)^2 \rangle$  を計算すると、accelerator mode が無いところでは、 $\langle (x_n - x_0)^2 \rangle = D \cdot n$  となって拡散係数  $D$  が定義できるが、accelerator mode が存在すると、 $\langle (x_n - x_0)^2 \rangle \propto n^\nu$ 、つまり anomalous diffusion になり拡散係数は発散する。この時べき指数  $\nu$  と、accelerator mode トーラスへの粒子の滞在時間分布  $P(\tau) \sim \tau^{-1-\beta}$  のべき指数  $\beta$  には

$$\langle (x_n - x_0)^2 \rangle \sim n^2 \int_n^\infty \tau P(\tau) d\tau \sim n^{3-\beta}$$

より  $\nu = 3 - \beta$  という関係がある。図4に  $B = 0.004044$  における  $\log n$  vs.  $\log \langle (x_n - x_0)^2 \rangle$  グラフ、図5に同じ  $B$  での  $\log \tau$  vs.  $\log P(\tau)$  グラフを載せている。図6より  $\beta = 1.46$  が求まり、それに対応する  $\nu = 1.54$  の線を図4に引いている。これより図4と図5は consistent になっているのが分かる。

ここでは broad-band-Chaos 領域中の粒子運動における2つの定性的に異なった物理量について報告した。 $\psi_\infty(\Lambda)$  は粒子の dynamics を特徴付ける物理量で、混合性を定量的に記述できるものと期待されている。拡散現象は、必ずしも混合性の帰結ではないが、カオスでは混合性の結果生じたものと思われる。ここでは、カオスの dynamics が本質的には決定論的な運動方程式である事が効いた現象として accelerator mode の存在を上げた。

図 1

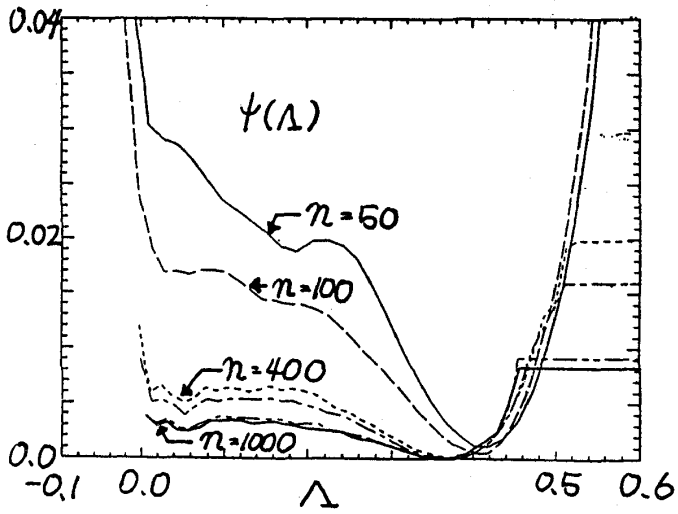


図 2

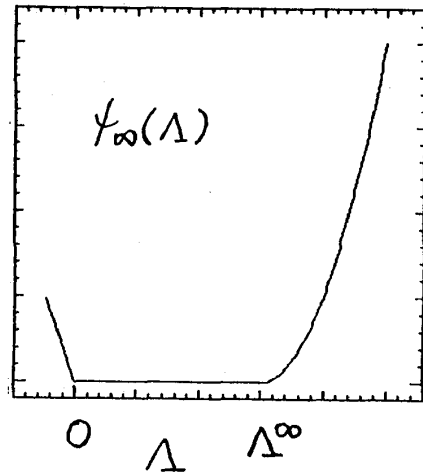


図 3

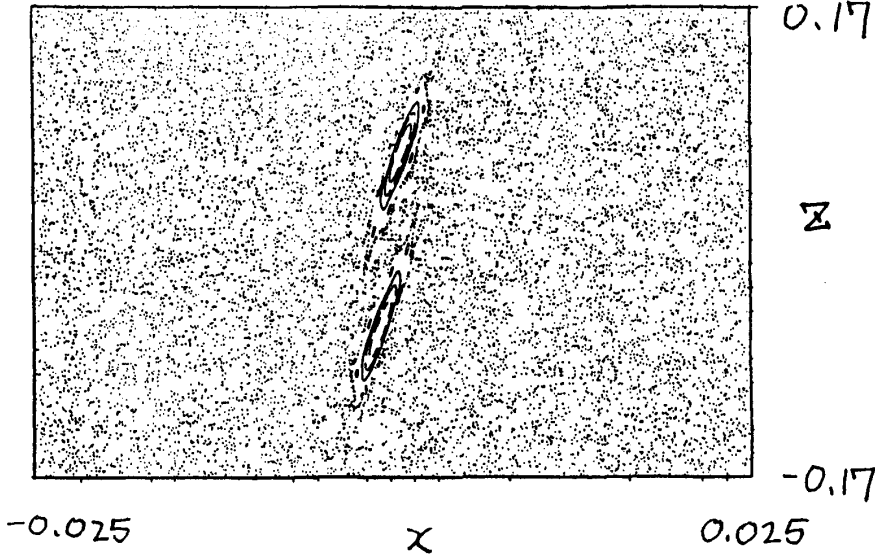


図 4

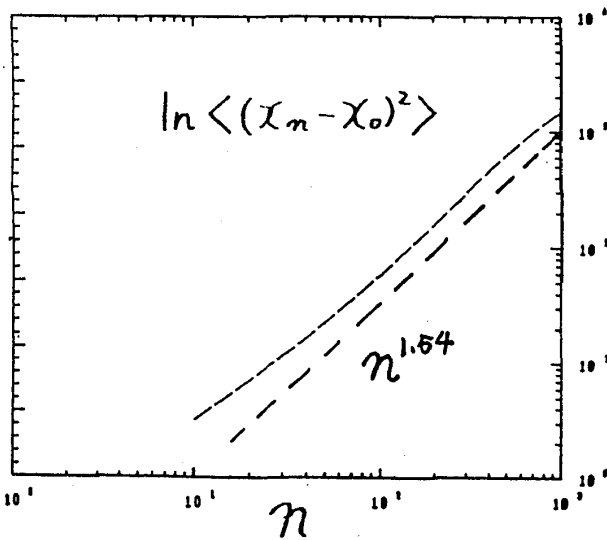


図 5

