

## Network of Chaotic Elements

東大・教養 金子邦彦

## §1. 動機とモデリング

大自由度カオスの主要例として、時空カオスを Coupled Map Lattice (CML) により調べてきた<sup>1)</sup>大自由度カオスの例としては、しかし、非線型要素が大域的に結合した場合もある。その例としては、ジョセフソン結合系、多モードレーザー等の物理系、進化、生態系、そして脳のダイナミクスが挙げられる。そこで、要素のカオス、結合の大域性という二点を持つ、もっとも簡単なモデルとして、大域結合マップ (Globally Coupled Map; GCM) を導入した<sup>2)</sup>具体的には、CML の平均場版として、

$$x_{n+1}(i) = (1-\epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) \quad (1)$$

を考える。ここで、 $n$  は離散時間、 $i$  は  $N$  個の要素の番号、 $f(x)$  はカオスをもつような 1 次元マップであり、以下ではロジスティック・マップ  $f(x) = 1 - ax^2$  をとる。上のモデルは  $y = f(x)$  で変換することにより

$$y_{n+1}(i) = f\left((1-\epsilon)y_n(i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N y_n(j)\right)$$

と等価である。この形と、スピングラスや神経回路網で使われる  $y_{n+1}(i) = \tanh \beta (\sum \epsilon_{ij} y_n(j))$  を比較すれば、我々の系は、結合のランダム性を消し、 $\tanh \rightarrow f$  としてダイナミクスのカオス性を導入したことになる。カオスによるランダムネスは外から与えた静的ランダムネスと異なり、時間依存、アトラクター依存、精度依存であり、上記モデルでは複雑系の新分野を開くことが期待される。

§2. クラスタリングと相<sup>2)</sup>

モデル(1)には強い平均化作用が働いている。そこで、結合は、各要素の振動の引き込みを持たらし、一方カオスはその初期値に対する敏感依存性により要素間の同調を破壊する。この二つの競合により、以下のアトラクターがあらわれる。

- (1) コヒーレント：すべての要素が完全に等しい ( $x(i) = x(j)$  for  $\forall i, j$ )
- (2) 少数個のクラスター：要素はいくつかのクラスターに分かれ、各クラスターでは完全

にひきこんで振動する ( $x(i) = x(j)$  for  $i, j \in$  同一クラスター)。

(3) 多数個のクラスター

(4)  $N$  個のクラスター, つまり各要素は完全にばらばらに振動する。

非線型性 (ロジスティックマップの  $a$ ) を増加, あるいは結合  $\varepsilon$  を減少させることにより次の相が逐次あらわれる。

(A) コヒーレント相: アトラクターは単一でコヒーレント振動を起しているもの。

(B) 秩序相: アトラクターは全て少数個のクラスターから成る。“秩序” と呼んだ理由は, これにより, もとのロジスティックマップのカオスが強く抑制されるからである。

(C) 部分秩序相: 初期値により, 少数, 多数個のクラスターのアトラクターが共存する。

(D) 乱流相: 初期値によらず, 完全にばらばらのアトラクターへ落ち込む。

以下では, 乱流相, 部分秩序相のもつ新しい動力学, ゆらぎの性質を簡単に触れよう。

### § 3. 乱流相における大数の法則の破れ<sup>3)</sup>

乱流相では見かけ上, 何ら秩序が存在しないように見える。もし, これが正しければ, 平均場  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j))$  は,  $N$  個のランダム場の平均とみなせ, その分布の幅は  $1/\sqrt{N}$  で減っていくことが期待される。数値計算の結果によれば, 平均場の分布の幅はあるサイズ  $N_c$  までは  $1/\sqrt{N}$  で減少するが, それ以上, 個数  $N$  を増やしても減少しない。このことは要素間に  $O(N)$  の相関が生じていることを意味する。この種の相関の発生は, カオス結合系にはかなり普遍的に見られる。これに反し, 準周期運動を結合した系では, 十分速く, 平均場の分布の幅は減少していく。

乱流相の状態に更に外から雑音を付加すれば, 大数の法則は回復する。しかし, この際, 分布の幅の減少は  $1/\sqrt{N}$  でなく  $N^{-\beta/2}$  ( $\beta < 1$  は雑音の強さに依存) となっている。アトラクターが樹枝状に組織化されていることと関連すると思われる。

### § 4. 部分秩序相のガラス的振舞<sup>4)</sup> とカオスの遍歴<sup>2)5)</sup>

部分秩序相では, 様々なクラスターの分布をもつアトラクターが多数, 共存している。クラスター化は,  $N$  個の要素を適当な数に分割していくことであるから, 部分秩序相では初期値により, 様々な分割が生成されることになる。同種の問題は, スピングラス (SK モデル) で調べられ, 分割の複雑さが,  $N \rightarrow \infty$  でも有限に残り, 普遍的性質をもつことが提唱されている<sup>6)</sup>。我々の系でも, 分割の複雑さは有限に残るようであるが, そこには普遍的性質は見られない。大自由度カオス系での「定性的普遍性は成立するが, 定量的には逸脱する<sup>7)</sup>」という予想の一例となる。

以上は, 「分割」というアトラクターの静的側面であるが, 更に面白いのは動的側面で

ある。部分秩序相では、系は幾つかの擬秩序状態 (attractor ruin) をカオスの的に遍歴する。つまり、有効自由度が少数の、秩序的運動 (何種類も存在する) と大自由度の完全に乱れた運動の間を行ったり来たりする。このような運動形態は乱流のコヒーレント構造と呼ばれるものと同様である。また、最近では、光乱流<sup>8)</sup>、多モードレーザー<sup>9)</sup>、脳のモデル<sup>10)</sup>などで見出され、カオスの遍歴は大自由度カオス系の普遍的特徴ではないかと予想されている。

## §5. まとめに代えて

大域結合カオス系でのクラスタリング、部分秩序相、大数則の破れ、カオスの遍歴などを紹介した。他の新現象やより詳しい議論は文献2)~5)を参照していただきたい。

自然界の多くの現象は、たぶん大自由度カオスであるにも拘らず、そのような観点からの研究はあまり行なわれていない。大自由度カオス系の単純例を徹底的に調べ挙げ、新概念を構築することにより、新しい世界観が開けることが期待される。例えば、大自由度カオスの重要例である脳のダイナミクスにおいては近年ようやく、カオス、非線型振動の研究が盛んになりつつある。そこでは、GCMの部分秩序相のような、(カオスの?)部分ひき込みや<sup>11)</sup>、カオスによるメモリー探索<sup>12)</sup>などが見出されつつある。GCMでの新現象はそこにどのような関係をもっていくであろうか?

## 参 考 文 献

- 1) K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 480; **74** (1985) 1033; Physica **23D** (1986) 436; **34D** (1989) 1; **37D** (1989) 60
- 2) K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 219, Physica **41D** (1990) 38
- 3) K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 1391 and errata (**66** (1991) 243)
- 4) K. Kaneko, J. Phys. A, in press
- 5) K. Kaneko, preprint (1991)
- 6) M. Mezard et al., J. de Physique **45** (1984) 843; B. Derrida and H. Flyvbjerg, J. de Physique **48** (1987) 971; K. Nishimura, K. Nemoto, and H. Takayama, preprint (1990)
- 7) K. Kaneko, in "Chaos, Order, and Pattern" (Plenum, 1991)
- 8) K. Ikeda, K. Matsumoto, and K. Ohtsuka, Prog. Theor. Phys. Suppl. **99** (1989) 295
- 9) F. T. Arrechi et al., Phys. Rev. Lett., in press
- 10) I. Tsuda, in "Neuro computers and Attention" (ed. A. V. Holden and V. I. Kryukov, Manchester Univ. Press, 1990)
- 11) C. M. Gray et al., Nature **338** (1989) 334; R. Eckhorn et al., Biol. Cybernetics **60** (1988) 121
- 12) W. Freeman, Brain. Res. Rev. **11** (1986) 259