

---

 特別寄稿
 

---

## マグノン系のカオス\*

岡山大 理学部

味野道信

(1991年4月3日受理)

## §1 はじめに

最近、自然科学の大変広い分野で、カオスの研究が盛んに行われるようになってきている。このカオスとは決定論に従う不規則振動を意味している。つまり簡単な法則に支配されながらも、ランダムとも思える不規則な運動を示す力学系のことである。この種の現象は、非平衡散逸系の散逸構造の中にもその例を多く見ることができる。非平衡散逸系とは系の外部からエネルギーを受け取り、一方ではそれを系の外部に流出している力学系である。また、散逸構造とはそれらの力学系に自発的に形成される、空間的または時間的構造の事である。たとえば、生物は外部からエネルギーを取り入れ、自己構造を維持している散逸構造の代表である。身近な例としては蠟燭の炎や、もっと大きな系としては台風や大気の運動を含む地球全体が散逸構造そのものである。事実、長期的な気候の変動がカオスであることを示す研究もいくつか報告されている。これらの散逸構造の特徴の一つに、系の外部から特別な干渉を加えることなく自発的に構造が発生する自己組織化がある。そしてこの自己組織化には、力学系の非線形性が大きな役割を担っていることが明らかになっている。このために予想もしなかった状況で突然自己組織化が発生したり、異質な構造に変わったり、あるいは消滅するといった相転移が発生する。

ところで、パラメトリック励起されたマグノン系に自励発振が起きることは以前から知られていたが、それについての詳しい研究はあまり行われていなかった。しかし、この自励発振がカオスであることが指摘されて以来、カオスとしての研究が盛んに進められて現在に至っている<sup>1-14)</sup>。マグノン系カオスの特徴としては、その微視的な相互作用が比較的よく研究されている点をあげることができる。従って、これに基づいた解析やシミュレーションと実験の対比が可能となる。例えば流体実験のモデルではマクロな変数を用いており、古典力学的な説明はついても、微視的量子的な描像を得ることはできない。一方、磁性は本来量子的現象であり、磁気モーメントを担うスピンは完全に量子的に記述される。従って、このマグノン系からなんらかの量子カオスの性質が得られることが、大いに期待されている。残念ながら、今までのところ量子的特徴はまだ得られていない。しかし、微視的な非線形相互作用がよく研究されている

---

 \* 本稿は、編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である。

点や、実験的にパラメータの制御が容易な点など、カオスを研究する上で大変優れた力学系であることは疑う余地が無いであろう。

また、熱平衡状態でのマグノン緩和現象についてはよく調べられているが、非平衡状態については詳しくは分かっていないのが現状である。特に高励起下での非平衡状態では、非線形緩和が重要な位置を占めることが予測されるので、これについての多方面からの研究が要望されている。従ってカオス状態の実験データとシミュレーションとの対比からは、マグノン間の相互作用の大きさ、非平衡状態での減衰率の決定などの物性的な研究成果も期待されている。

## §2 カオスとストレンジアトラクタ

非周期的な振動は自然界のあらゆる局面で出現する現象である。それらの現象に対しては、今までは主として確率論的な手法を用いて解析及び研究を行ってきた。この場合、見かけ上の偶然性の背後には（少なくとも古典的には）必然的な支配法則が存在するはずである。しかし、通常はコイン投げの様にその自由度の多さのため、確率論的に扱うことが正当化されると考えられている。では、不規則な結果を生み出す力学系は多自由度を必ず持たなければならないのであろうか。実は少数自由度の決定論でありながら、力学系の非線形さの故に不規則に運動する力学系が存在する。たとえば、レスラーモデルと呼ばれる次式について考える。

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y - Z \\ \dot{Y} &= X + e \cdot Y \\ \dot{Z} &= f + (X - \mu) Z \end{aligned} \quad (e, f, \mu > 0) \quad (1)$$

この力学系の自由度は3であるので、3次元相空間  $(X, Y, Z)$  の1点により系の状態は記述できる。従ってこの系の時間発展は、その代表点の動いた軌道として表現されることになる。保存系では時間発展に対して相空間の体積は保存されるが、散逸系では減少する。従って散逸系では、3次元相空間に一樣に分布する初期値から始まった軌道は、十分時間が経た後には、3次元よりも低い次元を持つ部分空間に吸い込まれることになる。この軌道が引き付けられている部分空間をアトラクタと呼ぶ。もし力学系が時間的に変動しない定常状態

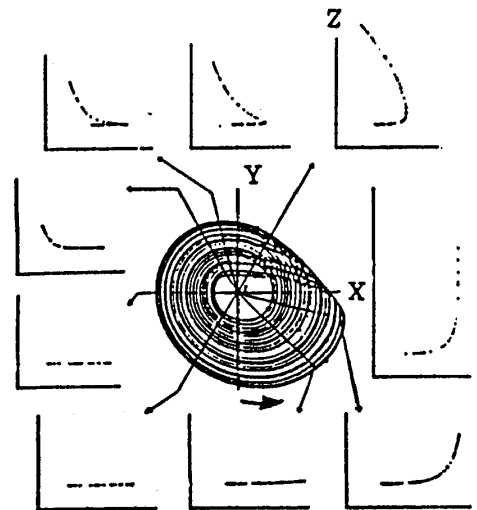


図1  
レスラーモデルのストレンジアトラクタ

に落ち着くのなら、このアトラクタは相空間内の1点で与えられる。周期的に振動するならば、閉曲線（リミットサイクルと呼ばれる）に吸収されることになる。もしカオスになれば、相空間のある領域（部分空間）に閉じ込められながらも、その中を不規則にさまようことになる。このカオスの場合に得られるアトラクタをストレンジアトラクタと呼ぶ。この様に散逸系では、アトラクタの性質が力学系の性質をよく反映している。従ってカオスを理解するためには、このストレンジアトラクタの性質を調べるのが重要となる。レスラーモデルのカオス状態でのストレンジアトラクタを図1に示す<sup>15)</sup>。中央がX-Y面への投影であり、その回りに紙面に垂直な方向での断面図（ポアンカレ断面）を示してある。ほとんど全ての初期値からの軌道は、このアトラクタ上の領域に引き込まれる。散逸系であるので、はば体積0のシート状になっていることが分かる。そして時間発展方向（反時計回り）に沿って進むと、帯が引き伸ばされながらその一部が裏返されて折り畳まれて行く様子を見ることができる。実は、この引き伸ばしと折り畳みが無限に繰り返されたものがストレンジアトラクタであり、厚み方向も無限枚のシートから成り立っている。つまり、カントール集合的な自己相似構造を持つことになる。カントール集合とは、次に示す過程によってつくられる点の集まりである。まず長さ1の線分を3等分し、その中央部を取り除いて両端の線分を残す。同様な操作を残った2つの線分に適用する。そして、この過程を無限に繰り返す。これは、0次元の点の集まりでありながら、フラクタル次元を調べると0.63...といった小数次元を持っている奇妙な集合である。従って、ストレンジアトラクタも厚さ方向には、 $0 < \alpha < 1$ の非整数次元を持つ。よってストレンジアトラクタは、一般に非整数なフラクタル次元を持つことになる。このフラクタル構造を調べることで、カオス状態を特徴付けることができる。

### § 3 実験及び解析

#### 3-1 試料及び装置

実験に用いた試料は、フェリ磁性体のイットリウム鉄ガーネット（YIG:  $T_c = 560\text{K}$ ）の単結晶である。化学式は $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ であり、イットリウムは $\text{Y}^{3+}$ で非磁性のため $\text{Fe}^{3+}$ が主として磁性を担っている。このYIGの特徴は $\text{Fe}^{3+}$ が球対称な荷電分布（ $L=0$ ）のため、フォノンとマグノンとの相互作用が弱い点あげられる。従って強磁性体中のマグノンを励起した時、そのエネルギーがマグノン系内に留まり、マグノン間の非線形相互作用が顕在化することが期待される。そしてマグノンの不安定化と増大、自励発振さらにはカオスが観測されるよ

うになる。

実験装置のブロック図を図2に示す。励起マイクロ波はXバンド（8.9GHz）を用いている。マイクロ波発振器の出力を進行波管増幅器（TWTA）で1Wに増幅したものをマイクロ波源として用いた。また、PINダイオードを回路に挿入し、必要な場合にはマイクロ波にパルス変調を加えることができるようになっている。励起マイクロ波強度は可変抵抗Aにより調節を行う。そして空洞共振器は臨界結合になるよう調整を行い、試料によるマイクロ波吸収量 $\chi''$ が反射マイクロ波の形をとって検出される。こうして時間変化しない $\chi''$ に対しては直流電圧が出力として現れ（通常の共鳴実験はこの場合に相当する）、 $\chi''$ に時間変化する成分、つまり自励発振があれば直流バイアスの上に交流成分が乗った信号が得られることになる。この信号電圧をシンクロスコープ上で観測すると共に、AD変換8bit、サンプリングクロック25MHzのデジタルメモリーに記録した。

今回の測定では、マグノン系のパラメトリック励起に平行励起法を用いた。この手法は、外部静磁場と平行にマイクロ波磁場を加えるので、この呼び名がある。通常の共鳴実験で用いるマイクロ波磁場を静磁場に対して垂直に加える方法（垂直励起）では、磁気モーメントの横成分が試料全体に渡ってそろっている必要があり、一般には $k=0$ の均一モードのみが励起される。今、モーメントが図3に示すように、楕円歳差運動をしているとする。磁化のz成分は、歳差運動周波数 $\omega_0$ の2倍の振動数で伸び縮みしている。従って、静磁場と平行に $2\omega_0$ の振動数を持つマイクロ波磁場で、マグノンの励起が可能となる。この時、磁気モーメントの横成分は試料中でそろっている必要がないので、 $k \neq 0$ のスピンの波が励起可能となる。しかし、z軸方向の位相はそろっていなければならないので、互いに反対方向に進む波数 $+k$ と $-k$ の波の

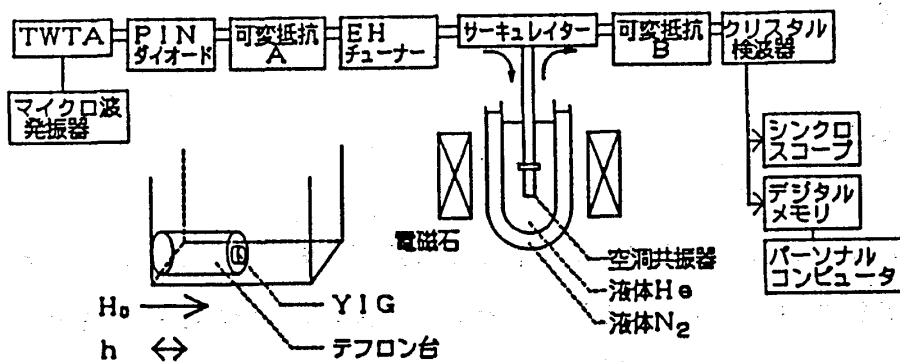


図2 実験装置ブロック図

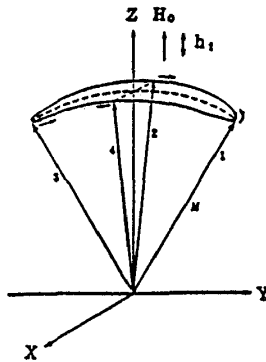


図3 モーメントの楕円歳差運動

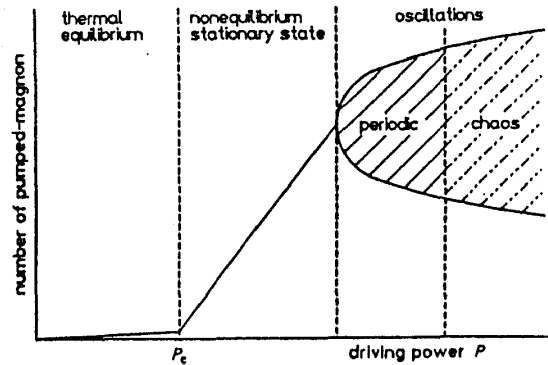


図4 マグノン数の励起電力変化

重ね合わせによって起きる定在波が励起されることになる。なお、歳差運動が楕円になるのは、磁気双極子相互作用及び結晶磁気異方性などのためである。平行励起過程は、第1次のスール不安定性によく似た非線形励起過程であり、励起が或る閾値を越えると雪崩現象的に吸収が増加する。この様子を図4に模式的に示す。

これは  $h_1$  をマイクロ波磁場強度、 $\omega_p$  をマイクロ波の周波数、 $\gamma$  を磁気回転比、 $|B_k|$  をフォトンとマグノンの結合定数とすると、励起により  $\pm k$  モードのマグノン数  $n_k$  の増加率は、

$$\frac{dn_k}{dt} = \pi \hbar \gamma^2 h_1^2 \frac{|B_k|^2}{(\hbar \omega_k)^2} n_k \delta(\omega_p - 2\omega_k) \quad (2)$$

となり、マイクロ波強度だけでなく自分自身の数  $n_k$  にも比例しているためである。現象論的に導入した線幅  $\Delta H_k$  を用いると、不安定増大が始まる臨界マイクロ波磁場  $h_c$  は、磁化を  $M$ 、波数ベクトルと静磁場のなす角度を  $\theta_k$  として、

$$h_c = \frac{\omega_p}{\gamma 4 \pi M \sin^2 \theta_k} \Delta H_k \quad (3)$$

となる。 $\Delta H_k$  の波数依存性は小さいと仮定すると、同じ波数を持つモードの内では  $\sin^2 \theta_k$  が最大となるマグノン、つまり  $\theta_k = \pi/2$  の外部静磁場に対して垂直に進むモードが一番に不安定化を起こす。この最初に不安定化したモードが、非線形励起のため選択的に指数関数的に増大することになる。そして更に励起が強くなると、他のモードとの非線形結合が顕在化し、マグノン数に自励振動が発生する。

今回は、円板状試料の回転軸 (YIGの磁化容易軸 [111]) 方向に外部静磁場、マイクロ波磁場共に加えてある。試料は  $TE_{101}$  モードの空洞共振器の底に固定した。そして空洞共振器ご

と液体ヘリウムの中に浸して、4.2Kの低温を保っている。また、マグノン系の自励発振を調べるので、系の外部からの余分な摂動を避けるために通常の共鳴実験とは異なり、外部静磁場の変調及びAFCは用いていない。

### 3-2 実験結果

静磁場をバタフライカーブのほぼ底に相当する $H_0=1935\text{Oe}$ に固定し、励起電力を増加させたときのマグノン系の応答を以下に示す。この磁場では、波数ベクトルと外部静磁場が直交し $k\sim 0$ のモードのマグノンが最初に励起される。マイクロ波を強くすると、励起が約 $0.3\text{mW}$ で最初のモードが不安定増大する閾値が観測された。以下、この閾値電力を $P=0\text{dB}$ として、それに対する相対強度で励起電力を表記することにする。まず $P=1.66\text{dB}$ で、マグノン数に正弦波的な自励発振が発生する。以下、励起を強くした時に得られた発振波形を図5に示す。 $P=2.20\text{dB}$ で周期倍分岐が起こり、2倍周期の変調のために、極大値が交互に大小と変化している様子が分かる。この時、 $P=1.66\text{dB}$ に比べて発振の振幅も大きくなっている。以下 $P=3.60\text{dB}$ まで不規則な振動が観測されている。しかし、 $P=4.08\text{dB}$ 、 $4.32\text{dB}$ 、 $5.25\text{dB}$ と励起を強くすると、自励発振の振幅は大きくなりながらも、再び4周期、2周期、1周期へと周期的振動波形に変化していく。

自励発振をフーリエ変換して求めたパワースペクトルを図6に示す。 $P=1.66\text{dB}$ では、正弦波に見えた周波数成分と、その高調波成分が見えている。以後自励発振の主たる周波数成分を、基本周波数 $f_0$ と呼ぶことにする。 $P=2.20\text{dB}$ では、 $f_0$ が高周波数側に移動し、新しく $1/2\cdot f_0$ の成分が現れ

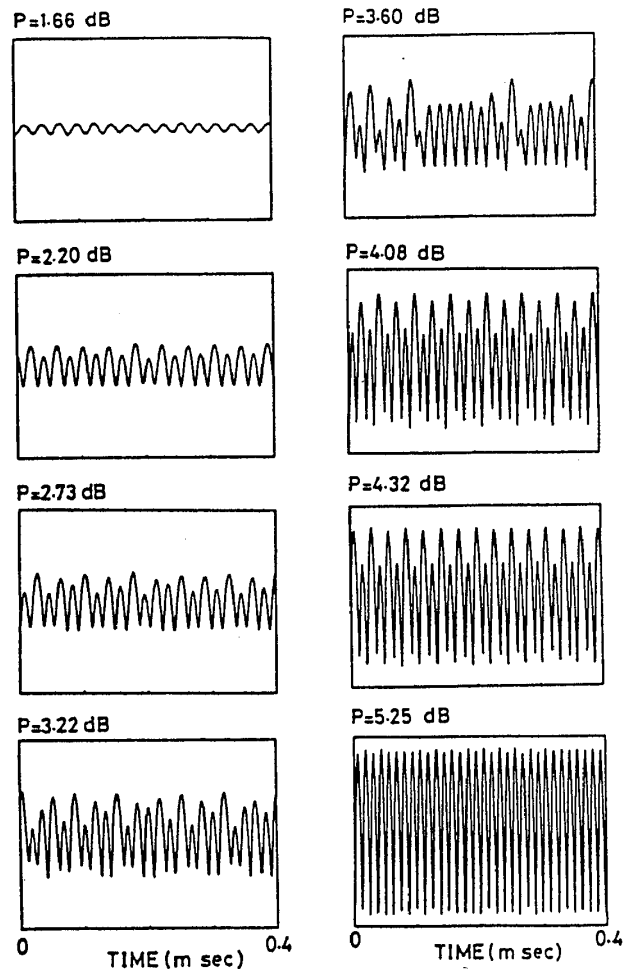


図5 発振波形の励起電力変化

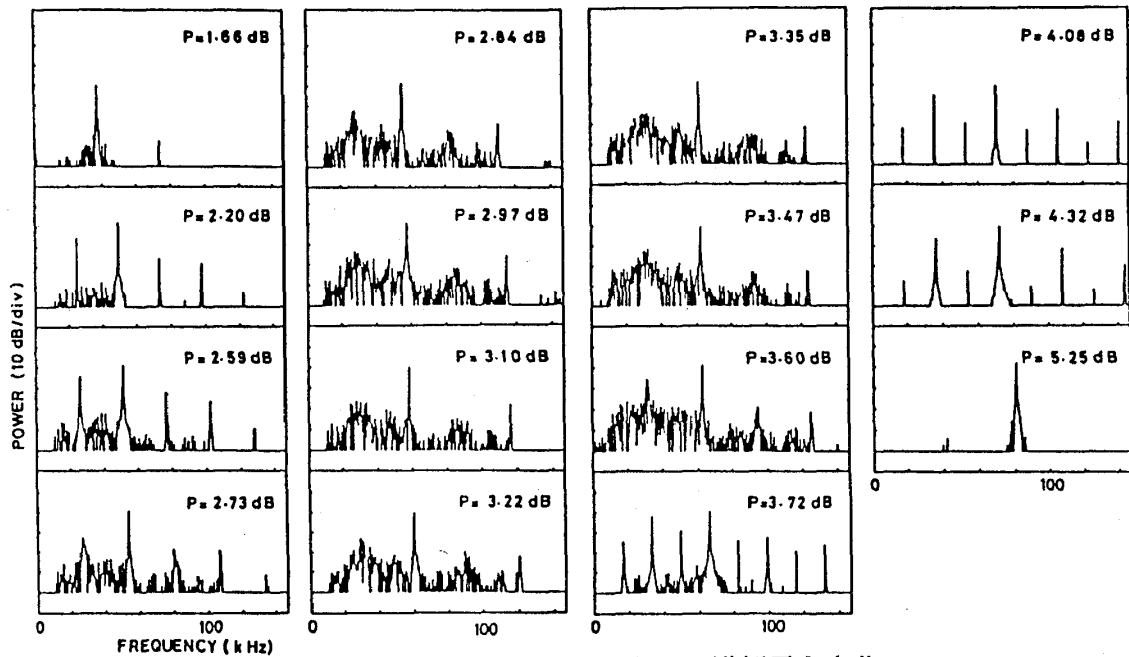


図6 パワースペクトルの励起電力変化

ている．そして， $1/4 \cdot f_0$ ， $3/4 \cdot f_0$ 付近にも弱いピークが有り，バンド状のスペクトルに移行し始めている． $P = 2.59\text{dB}$ から $2.84\text{dB}$ にかけては， $f_0$ と $1/2 \cdot f_0$ の成分が幅を持つようになり，同時に $1/4 \cdot f_0$ ， $3/4 \cdot f_0$ の成分が大きくなっている．このスペクトルから，発振がもはや周期的でないことを知ることができる． $P = 3.60\text{dB}$ まで励起を強くすると， $f_0$ と $1/2 \cdot f_0$ 以外には目だつた周波数成分は無くなり，連続スペクトルに移行している．この励起強度の領域ではスペクトルが帯状になったカオス状態においても，明確な基本周波数 $f_0$ を定義することができた．

そこでこの $f_0$ を励起電力の関数としてプロットしたのが

図7である．励起の増加に従って自励発振周波数が高周波数側に変化する．この時，周期的発振領域とカオスの発振領域の間には，大きな不連続は見られていない．

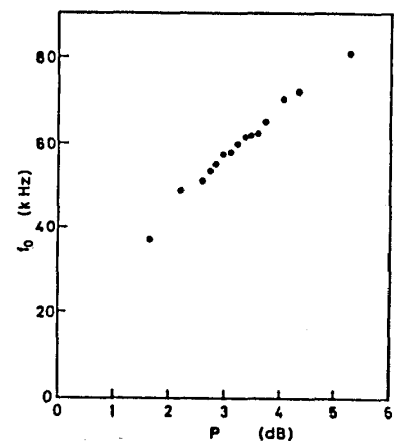


図7

自励発振周波数の励起電力変化

周期的な発振が再び現れた後，さらに励起を強くした場合に得られるデータを以下に示す．

このパラメータ域では，後の解析で説明する様に自励発振の発生機構が変化するため，発振波形も異なった性質を持つ． $P = 7.79\text{dB}$ から $17.95\text{dB}$ までの発振波形を図8に示す．ただし，波形を見やすくするために，図5に比べて縦軸及び横軸のスケールは異なっている．まず， $P = 7.79\text{dB}$ では，振幅に変調が加わり，再び非周期的な発振に変化しているのが分かる． $P = 8.05\text{dB}$ ， $8.31\text{dB}$ と周波数の高い成分が大きくなり， $P = 10.38\text{dB}$ 付近では比較的周期的な発振波形が得ら

れている．そして，この波形が  $P = 13.01\text{dB}$  から  $17.95\text{dB}$  に示すようなカオス波形へと移行する．次に，この励起電力領域でのパワースペクトルの変化を図9に示す． $P = 7.79\text{dB}$  では，長周期で不規則な振動成分のために，それらの周波数成分の線形結合でスペクトル全体にノイズが乗っている様に見える． $P = 8.05\text{dB}$ ， $8.31\text{dB}$  と励起を強くすると，波形データで見たように，今までの基本周波数  $f_0$  (約  $80\text{kHz}$ ) の2倍の成分が強くなる様子がよく分かる．そして， $P = 8.56\text{dB}$  では，この成分が新しい基本周波数となる． $P = 10.38\text{dB}$  では新たに  $196\text{kHz}$  の周波数成分が現れ， $f_0$  となる．この時，低周波数側に在る2番目の周波数成分は  $110\text{kHz}$  であり，これと  $f_0$  との線形結合がさらに低磁場側にある  $86\text{kHz}$  のピークとなる．また， $P = 10.95\text{dB}$ ， $11.50\text{dB}$  では，ほぼ周期的であることが分かる．以下励起を強くすると， $500\text{kHz}$  付近までの振動成分がいくつか現れ，それらが互いに単純な整数比になるように引き込み現象を起こしたり，各振動成分の線形結合が強く現れる様になる． $P = 13.46\text{dB}$  では5倍周期， $P = 15.12\text{dB}$  では12倍周期への引き込みが起きている．

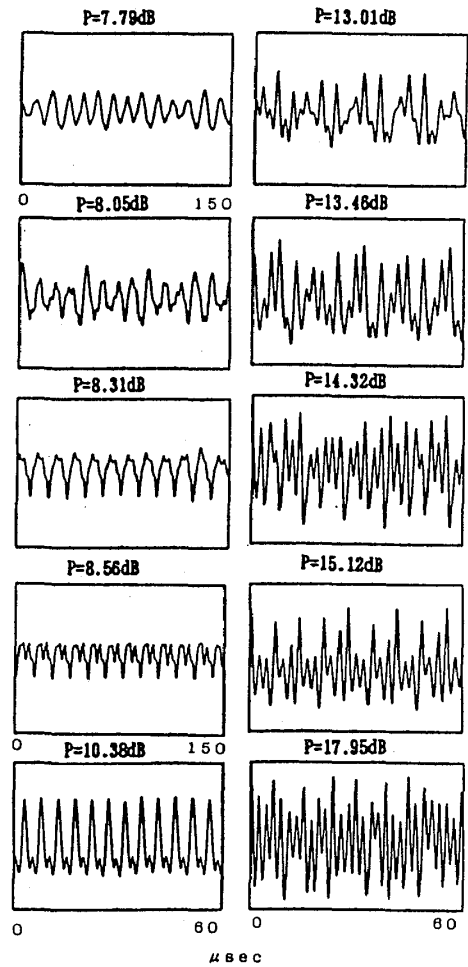


図8 発振波形の励起電力変化

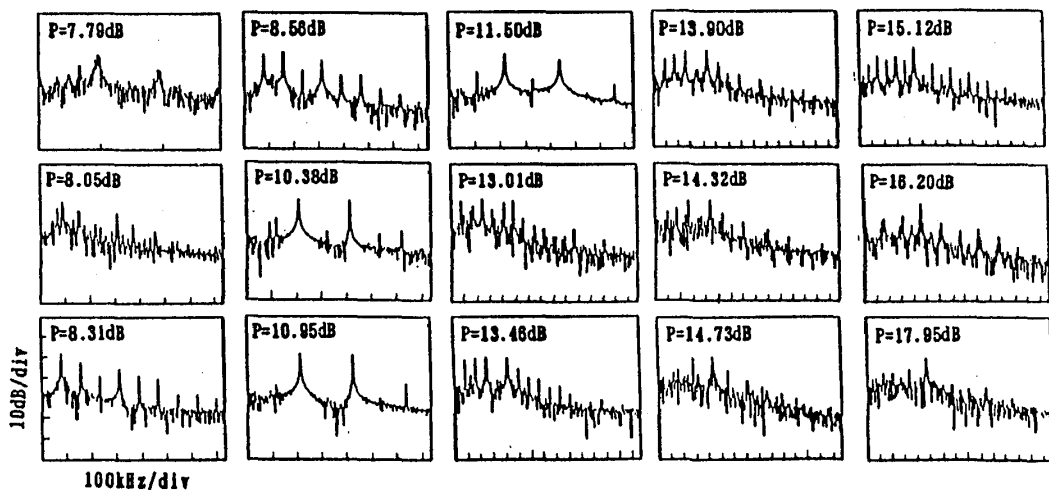


図9 パワースペクトルの励起電力変化



3-3 解析

3-3-1 ローレンツプロット

得られた波形が、決定論的カオスであるかどうかを調べる方法として、ローレンツプロットと呼ばれるものがある。これは、低次元カオスの解析に簡単かつ有効な手法である。まず時系列データの極大値を、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 、と順に選び出す。次に $P_{n+1}$ を縦軸、 $P_n$ を横軸としてプロットを行う。もしもこのプロットから、なんらかの写像関数が得られれば、現在のピークの高さが分かれば次のピークの高さが決定されることを意味し、この力学系は決定論的であることが分かる。ただし、カオス力学系の自由度が大きければ、一見しただけで意味の有る写像関数が得られるとは限らない。従って、リターンマップが得られないからと言って、カオスであることが直ちに否定される訳ではないことに注意する必要がある。

まず、 $P = 2.20\text{dB}$ から $4.32\text{dB}$ の間で得られたローレンツプロットを図10に示す。明らかに一山の写像関数が得られており、これらの一見不規則な振動が少数自由度の決定論的カオスであることを示唆している。 $P = 2.20\text{dB}$ では、2周期成分のために、左上と右下の2つの部分にマップが分かれている。しかし、詳しく調べると左上は山型の曲線、右下は左上がりの直線構造を持っている。もしも完全な2周期軌道であれば、ローレンツプロットは左上と右下の2点のみになるはずである。そして、測定系の揺らぎや熱雑音がそれに重なれば、その2点を中心として対称的に測定点は分布するはずである。従って、この $P = 2.20\text{dB}$ はカオスが発生した後の2バンド状態であると考えられる。これはロジスティックマップでも見られるように、 $2^\infty$ の周期点が現れた後、逆に $2^n, \dots, 2^2, 2^1, 1$ とバンドが融合しながら減少する過程の一部である。 $P = 2.59\text{dB}, 2.73\text{dB}$ と励起を強くすると、今まで2つに分裂していたバンドが互いに伸びて最終的には1つのバンドに融合する様子が捉えられている。これは、パワースペクトルで見ると、 $1/2 \cdot f_0$ 成分が小さくなることに対応

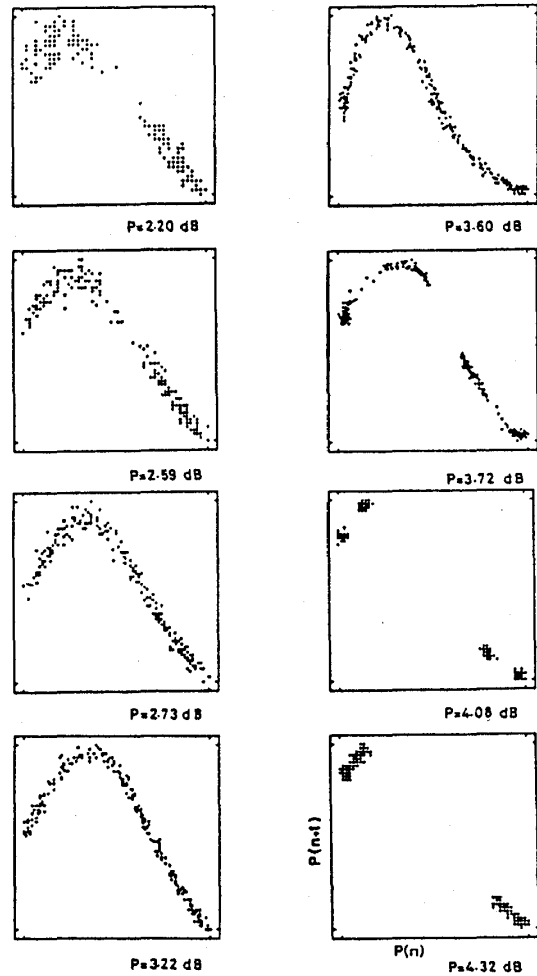


図10

ローレンツプロットの励起電力変化

している。励起が  $P = 3.22\text{dB}$ ,  $3.60\text{dB}$ まで進むと、写像の左側の枝も下に伸び、関数を表す山が急斜面を持つようになる。 $P = 3.72\text{dB}$ では、再びマップが4つの部分に分裂する。しかし、各部分は今までの写像関数に似た形を保っている。これは、各島の間は4周期で規則的に移りながら、島の内部では不規則に運動していることを意味する。そして、 $P = 4.08\text{dB}$ では4周期振動が、 $P = 4.32\text{dB}$ では2周期振動に近付いた4周期振動が捉えられている。なお、 $P = 7.79\text{dB}$ より励起の強い領域では、不規則振動をこの種のリターンマップでうまく特徴付けることはできなかった。これは、励起が強くなると自励発振に関与するマグノンモードが増加し、アトラクタの次元が高くなったためと考えられる。

このリターンマップからカオスを定量的に特徴付ける最大リアプノフ指数を見積ることができる<sup>16)</sup>。まず、 $P = 3.60\text{dB}$ で得られたリターンマップを11次の多項式  $f(x)$  で近似した。図11に実験から得られた点に重ねて、近似多項式  $f(x)$  を実線で示す。リアプノフ指数は写像の拡大率の平均によって与えられる。従って、最大リアプノフ指数  $\lambda$  は次式から求めることができる。

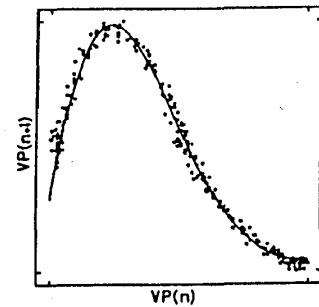


図11  
リターンマップと近似多項式

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |f'(x_i)|$$

$$x_i = f(x_{i-1}) \quad (4)$$

ここで  $f'(x)$  は  $x$  での微分係数つまり写像の傾きを意味している。 $n = 50,000$ 回の繰り返しを計算機により行ったところ、最大リアプノフ指数  $\lambda = 0.34$ を得た。正の値を持つ最大リアプノフ指数が得られたことより、隣接する軌道が時間経過と共に指数関数的に離れて行く軌道不安定性が存在することになる。従って、この不規則振動が明らかに決定論的カオスによるものであることが分かる。

### 3-3-2 ストレンジアトラクタ

次に振動している力学系を、そのアトラクタによって特徴付けることを考える。通常、自由度が  $n$  の力学系は  $n$ 次元相空間内の運動を考えることにより、その運動の特徴を捉えることができる。たとえば、2つのマグノンモードが関与している振動力学系ならば、各モードについ

て振幅と位相の合計4次元の相空間内での軌道を調べればよいことになる。当然、シミュレーションでは、直接これらの4変数を独立に計算することは可能である。しかし、実験ではマイクロ波と直接結合しているマグノン数の時間変化、つまり1次元データが得られるだけである。そこで、この1次元データからn次元時系列データを復元することを考える。今、得られている1次元データを $x(t)$ とする。n次元時系列データ $V(t)$ は、遅延時間法を用いると、次式のように表される。

$$V(t) = [x(t), x(t+\tau), \dots, x\{t+(n-1)\tau\}] \quad (5)$$

ここで用いた $\tau$ を遅延時間 (Delay time) と呼び、原理的には雑音の無いデータに対しては任意の時間でよい。しかし、あまり小さいと相空間内の図形が直線状になり、その特徴が判断しにくくなる。また、あまり大きすぎると、実際のデータでは避けられない雑音の影響が大きくなったり、カオスの場合は本質的な軌道不安定性があるのでデータ間の相関が小さくなり解析に不都合となる。このため、通常は基本周期の数分の1程度に $\tau$ の大きさをとる場合が多い。こうして得られた相空間内の軌道は、本来の力学系の特徴を再現していることが知られている。

図12に、 $P = 1.66\text{dB}$ から $5.25\text{dB}$ で得られた振動波形を、2次元相空間に再現したアトラクタを示す。ここでは、遅延時間 $\tau = 3\mu$ 秒として埋め込みを行った。 $P = 1.66\text{dB}$ では1周期振動を反映して、1重のリミットサイクルが得られている。 $P = 2.20\text{dB}$ ではローレンツプロットで示したように、少し帯状に広がった2重巻のアトラクタとなる。そして、 $P = 3.60\text{dB}$ まで励起が増加すると帯が一枚に

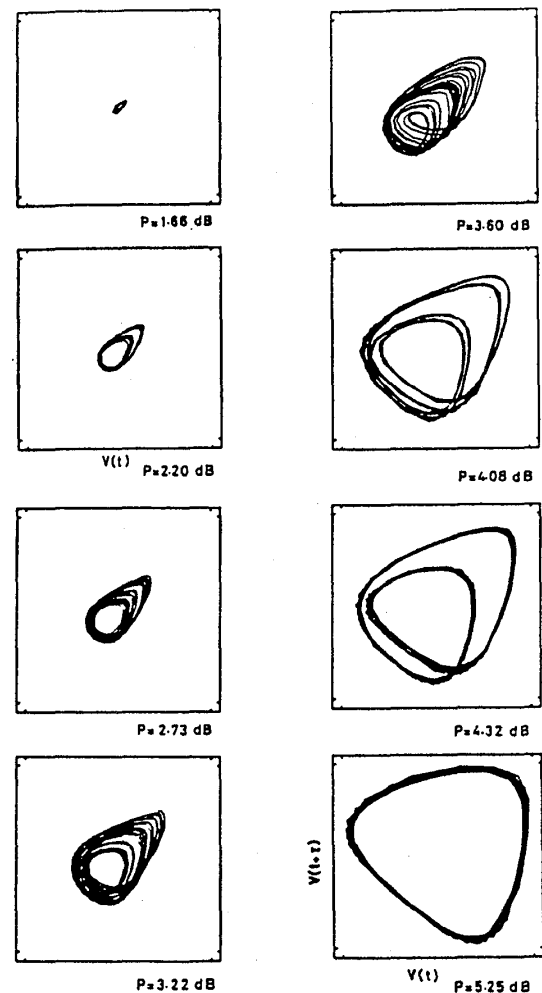


図12 ストレンジアトラクタの励起電力変化

つながって、相空間のより広い範囲を軌道が埋めつくしている。これは、非周期振動の振幅変化がより大きくなったことを意味している。また、アトラクタの右下に軌道が交差するように見られる領域があるが、これは軌道を2次元相空間に埋め込んだためである。後に示すように3次元相空間に埋め込むと、ここでアトラクタの折り畳みが発生していることが分かる。そして、 $P = 4.08\text{dB}$ ,  $4.32\text{dB}$ ,  $5.25\text{dB}$ と1周期のリミットサイクルに変化する。

次に励起をさらに強くして、再び非周期振動が現れるパラメータ域でのアトラクタを図13に示す。遅延時間 $\tau$ は、 $P = 7.79\text{dB}$ から $10.95\text{dB}$ までは $1\mu\text{秒}$ 、 $13.01\text{dB}$ から $13.46\text{dB}$ までは $0.8\mu\text{秒}$ 、 $14.73\text{dB}$ から $17.95\text{dB}$ では $0.6\mu\text{秒}$ を用いている。この図から直観的にも、 $P = 3.60\text{dB}$ 付近で見られたアトラクタよりも、複雑な構造を持っていることがうかがわれる。 $P = 7.79\text{dB}$ では、それまでのリミットサイクルが幅を持つように変化して、 $P = 8.05\text{dB}$ ではトーラス状のアトラクタとなる。そして一旦、比較的幅の無い周期的なアトラクタになった後、 $P = 13.01\text{dB}$ で多くの振動成分のために、複雑なものに移行する。その中で、 $P = 15.12\text{dB}$ では各振動成分が5周期軌道に引き込まれている様子が見られる。

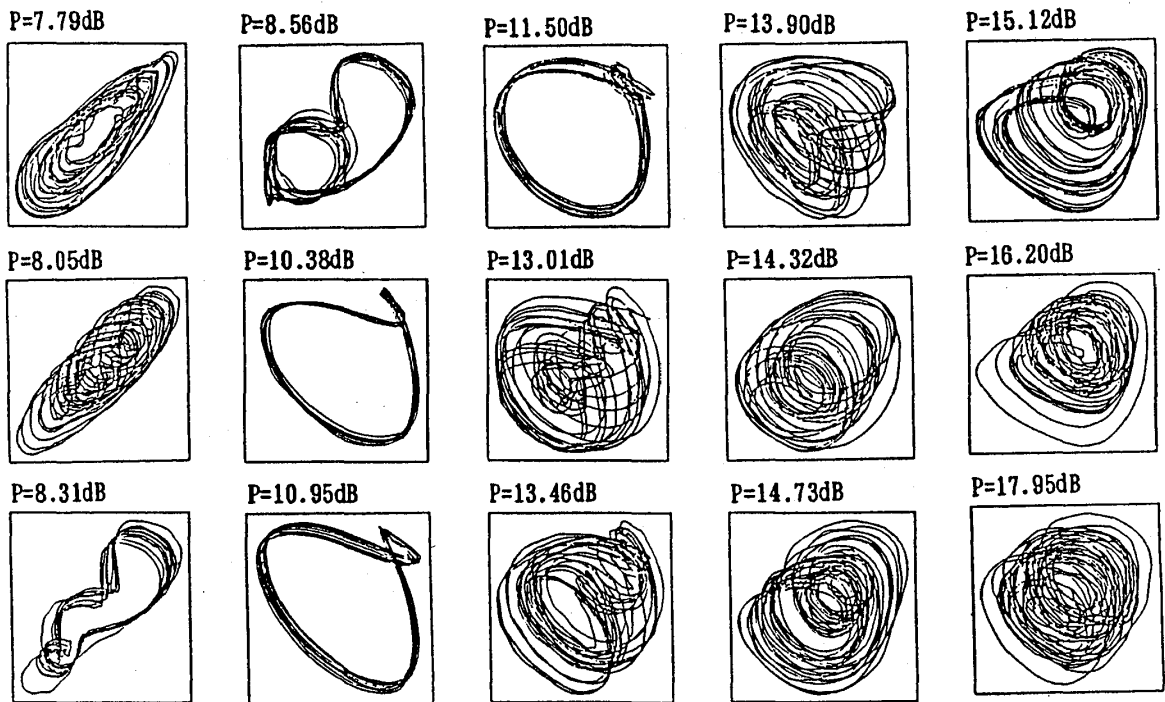


図13 ストレンジアトラクタの励起電力変化

最初に現れるカオス状態でのストレンジアトラクタの特徴を、 $P = 3.60\text{dB}$ について詳しく調べることにする。まず1次元データから遅延時間法を用いて、3次元相空間での軌道  $[x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau)]$  を再現する。図14上段はアトラクタの  $v(t)$  対  $v(t+2\tau)$  面への投影図である。そして、図中のAからJまでの線分を通り、紙面に垂直な面で切ったアトラクタの断面（ポアンカレ断面）を図14下段に示す。ほぼ厚みの無いシート状になっていることが分かる。そして時間発展方向に沿って見ると、 $H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow B$ と引き伸ばされ、 $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$ と折り畳まれていることが分かる。この引き伸ばしと折り畳みを無限に繰り返した結果がストレンジアトラクタである。従って、各断面から直接見ることはできないが、実は厚み方向には無限の自己相似構造を持っていることになる。

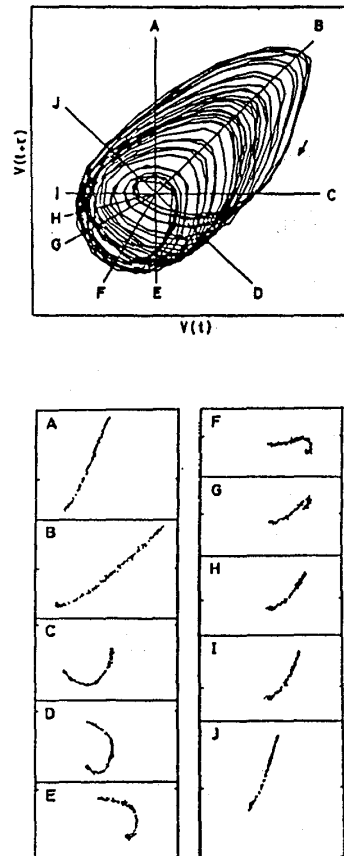


図14  
ストレンジアトラクタとポアンカレ断面

### 3-3-3 フラクタル次元

ストレンジアトラクタの特徴である自己相似性を定量化するために、フラクタル次元を導入する。よく知られているフラクタル次元には、ハウスドルフ次元を実際の解析に適用可能な形式に簡略化した容量次元  $D_0$ 、情報次元  $D_1$ 、そして相関次元  $D_2$  等がある。まず、直観的に分かりやすい容量次元  $D_0$  について説明する。今、考察する図形を  $m$  次元空間の中で考える。そして、この図形を一辺の長さが  $\epsilon$  の  $m$  次元立方体（または  $m$  次元球）で覆うとする。この時、考えている図形を埋め尽くすのに必要な立方体の最小個数を  $N(\epsilon)$  とすると、 $D_0$  は次式で与えられる。

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \quad (6)$$

この定義により、よく知られている自己相似図形であるカントール集合やコッホ曲線が非整数のフラクタル次元を持つ。しかしながら、この方法では膨大な量のデータ点が次元の決定のため

めに必要であり、実際の実験データには適用しにくい。そこで、通常は比較的少数のデータにも有効である相関積分法を用いて相関次元 $D_2$ を求めることが行われている<sup>17)</sup>。まず、実験データを先に示した遅延時間 $\tau$ を用いる手法により、 $n$ 次元空間に再構成する。この時、離散的に得られているデータ間隔（通常は基本周期の1/5から1/10の時間間隔でデータを取り込んでい）を $\tau$ に採用する場合が多い。つまり、1次元時系列データ  $x(1), x(2), \dots, x(n), \dots$  から $n$ 次元データ  $V_i$ は、次式の様になる。

$$\begin{aligned} V_1 &= [x(1), x(2), \dots, x(n)] \\ V_2 &= [x(2), x(3), \dots, x(n+1)] \\ &: \\ V_i &= [x(i), x(i+1), \dots, x(i+n-1)] \end{aligned} \quad (7)$$

次に、 $n$ 次元データ点 $V_i$ から距離 $r$ の関数である相関積分 $C(r)$ を次の様に定義する。

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(r - |V_i - V_j|) \quad (8)$$

ここで、 $\theta(x)$ はHeaviside Step Functionであり、

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 1 \quad (\text{if } x > 0) \\ \theta(x) &= 0 \quad (\text{if } x < 0) \end{aligned} \quad (9)$$

なる値をとる。また、 $N$ は $n$ 次元空間に埋め込んだ全データ数である。この相関積分はアトラクタ上の2点間の距離 $|V_i - V_j|$ が、 $r$ より短いデータ対の数を与える。そしてこの相関積分は $r$ の小さな領域では、次式のように振舞うことが予測される。

$$C(r) \sim r^d \quad (10)$$

図15に示すように、データ点が1次元上に分布していると $C(r)$ は $r$ の1乗に比例し、2次元面上に分布していれば $r$ の2乗に比例して増加することになる。同様に、自己相似的に分布している場合には $d$ が非整数のフラクタル次元を与える。実験データの解析には、 $\log C(r)$ 対 $\log r$ のプロットを行い、その傾きから $d$ を求める手法を用いる。通常、測定される力学系の

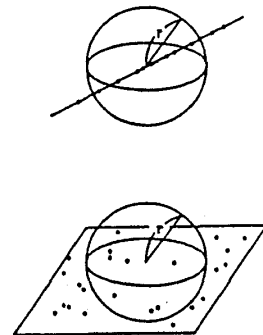


図15 相関指数模式図

自由度は分かっていないので、埋め込み次元  $n$  として10から20程度の値を用いることが多い。この場合、埋め込まれたデータは、力学系を支配している自由度程度の次元を持つ部分空間内に分布している。従って、少数次元の力学系では埋め込み次元  $n$  を変化させた時に  $d$  の値が一定値に収束すれば、その値がストレンジアトラクタのフラクタル次元となる。一方、熱雑音の様な多自由度振動では、 $n$  の増加に従って  $d$  も増加する。このため、相関次元を調べることによりカオスと他の多自由度による不規則振動を区別することができる。図16は  $P = 3.60\text{dB}$  のデータを  $n = 10$  次元空間まで埋め込んだときに得られた  $\log C(r)$  対  $\log r$  のグラフである。 $\log C(r)$  が  $-4$  から  $-1$  程度の範囲に渡って、よく直線に乗っていることが分かる。 $\log C(r)$  が小さい領域では、もとのデータに含まれるノイズの影響で傾きが大きくなっていると考えられる。そこで、 $\log C(r) \sim -3$  付近での

傾き  $d$  を埋め込み次元  $n$  の関数としてプロットしたものが図17である。右下の挿入図は、白色雑音に対して同様な解析を行った場合のプロットである。実験データは  $n$  の増加に対して、 $d$  が2.0付近に収束している様子が分かる。従って、このストレンジアトラクタのフラクタル次元  $D_2$  は2.0程度となる。同様な解析を行ったところ、カオス発生点近傍  $P = 2.20\text{dB}$  では  $D_2$  は約1.5となった。これらのことから、 $P = 3.60\text{dB}$  付近までに現れた最初の不規則振動は、自由度の小さいカオス状態であることが分かる。さらに励起を強くしたときに観測される不規則振動から得られた  $D_2$  の変化をプロットしたものが図18である。なお、 $\log C(r)$  対  $\log r$  プロットの直線性があまり良くなく、次元が決定できない領域もあった。一般的には、 $D_2$  が大きくなるほど  $\log C(r)$  対  $\log r$  のプロットが直線に乗らなかったり、 $d$  が  $n$  の増加に対して速やかには収束しないなどの原因により、次元の決定が困難となる傾向がある。 $P = 7.79\text{dB}$  では  $D_2$

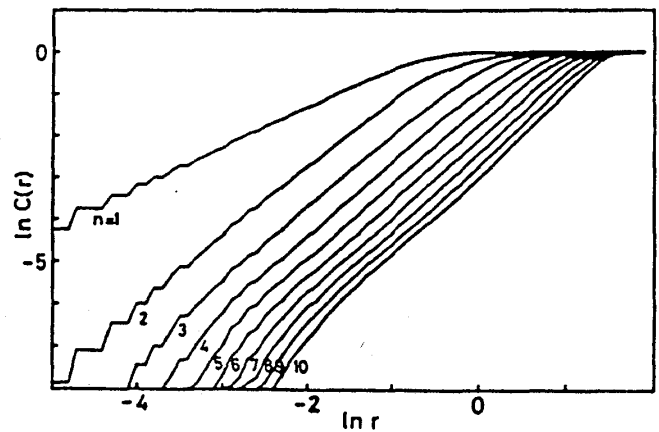


図16 相関積分の変化

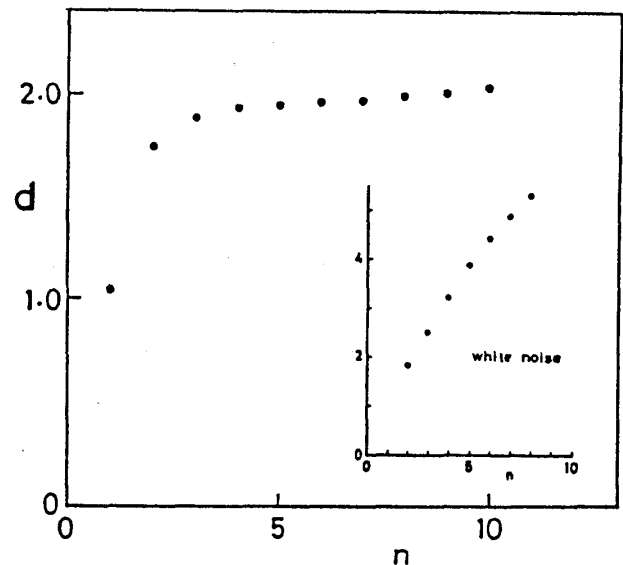


図17 相関指数の埋め込み次元変化

=2.8,  $P = 13.01\text{dB}$ では $D_2 = 3.0$ ,  $P = 14.73\text{dB}$ では $D_2 = 3.4$ ,  $P = 16.20\text{dB}$ では $D_2 = 4.2$ と励起の増加に従って $D_2$ も増加傾向にある。しかし、大きな周波数成分が互いに整数比に引き込まれている励起電力では、発振が周期的なものに近付くために $D_2$ の値が減少している。これからも、2度目に観測された不規則発振は最初に観測された発振に比べて自由度が多く、動力学に参与しているマグノンのモード数が増加していることが分かる。

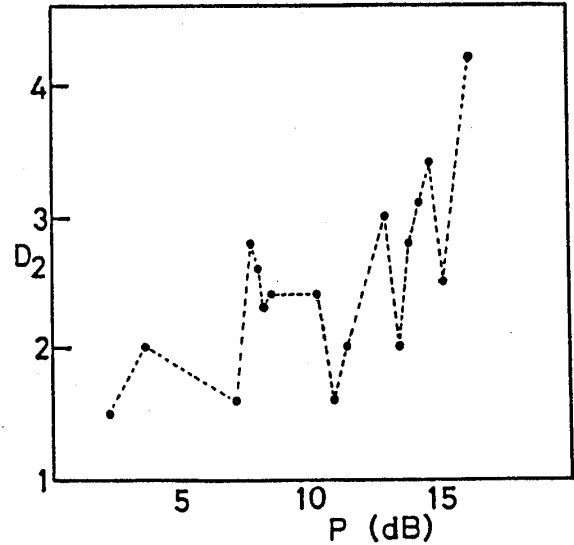


図18 相関次元の励起電力変化

### 3-3-4 $f(\alpha)$ スペクトル

ここまで述べたように、ストレンジアトラクタはそのフラクタル次元により特徴付けられる。しかしながら、実際のストレンジアトラクタは全体にわたって均一ではなく、揺らぎが内在されている。例えば、ストレンジアトラクタが時間発展方向に一回りする間を見ても、その一部分だけが折り畳まれており他の部分は折り畳まれていない。従って、アトラクタの上では折り畳みの回数が多い部分や少ない部分が複雑に混ざりあって分布している。つまり、フラクタル次元もアトラクタ全体で均一ではなく、部分部分によって異なる値を持つと考えられる。その次元の揺らぎを特徴付けるのが $f(\alpha)$  スペクトル（特異点スペクトル）である<sup>18)</sup>。これを調べることにより、カオスのより詳しい解析が可能となる。つまり、ストレンジアトラクタのフラクタル構造を1つのスカラー量で表したフラクタル次元に比べて、より多くの情報を記述する方法がこの $f(\alpha)$  スペクトルである。従って、2つのカオス状態が同じかどうか、たとえば実験で得られた不規則振動とシミュレーションで得られた振動が同一かどうかを詳しく調べることが可能となる。またカオス発生点での普遍性が、 $f(\alpha)$  スペクトルについても幾つか予測されており、実験データについての確認も興味を持たれている。

では最初に $f(\alpha)$  について簡単に紹介する。まず観測しようとする集合を小さい部分集合に分割する。次に各部分集合がフラクタル次元 $d$ で特徴付けられるとする。次に、フラクタル次元 $d = \alpha$ を持つ部分集合を選び出す。そしてこの部分集合の分布をフラクタル次元 $f$ で特徴付ける。この時、選び出す $\alpha$ の値を変化させることにより、それに対するマクロな分布 $f$ が変化する。こうして、滑らかな関数 $f(\alpha)$  が得られる。つまり、フラクタル次元 $\alpha$ を持つ領域



が、フラクタル次元  $f$  で分布している事を示している。これが、 $f(\alpha)$  スペクトルがマルチフラクタルとも言われる理由である。

では、一般的な場合について  $f(\alpha)$  スペクトルの計算方法を直観的に述べることにする。まずストレンジアトラクタを  $S$  として、これを  $M$  個の微小なサイズ  $l$  の部分集合  $S_1, S_2, \dots, S_M$  に分割する。次に各  $S_i$  の中での確率測度を  $P_i$  とする。今回の解析では時系列データから多次元相空間に埋め込んだ点が全部で  $N$  点有り、 $S_i$  の中に  $n$  点データが有るとすると、確率測度は  $P_i = n/N$  で与えられる。次に、パラメータ  $q$  を導入し、分配関数  $\Gamma$  を次の様に定義する。

$$\Gamma(q) \equiv \sum P_i^q \quad (11)$$

これは  $q \sim \infty$  では  $P_i$  の大きい、つまり密度の高い点が、そして  $q \sim -\infty$  では密度の小さい点が、主として  $1/l$  式の和に寄与することになる。つまり  $q$  は密度の異なる領域を抜き出す役目を持つパラメータである。そして、

$$\Gamma(q) = \sum P_i^q \sim l^{-\tau(q)} \quad (12)$$

が成立するとすると、 $\tau(q)$  は  $q$  によって選ばれた密度領域に、重みをかけた集合のフラクタル構造を反映していると考えられる。この時、一般化次元  $D(q)$  は次式で与えられる。

$$D(q) = \tau(q) / (q-1) \quad (13)$$

この  $\tau(q)$  から以下の変換を用いて  $f(\alpha)$  スペクトルを求めることができる。

$$\begin{aligned} \alpha &= d\tau / dq \\ f(\alpha) &= q \cdot d\tau / dq - \tau(q) \end{aligned} \quad (14)$$

ところで  $\tau(q)$  を実験データから得るために、次式を  $12$  式に代入する。

$$\sum P_i^q \sim \langle P_i^{q-1} \rangle \quad (15)$$

ここで  $\langle \rangle$  はいくつかの  $i$  に対する平均値を意味する。従って分配関数  $\Gamma$  は、

$$\Gamma(q, l) = \langle P_i^{q-1} \rangle \sim l^{-\tau(q)} \quad (16)$$

となる。よって、各  $q$  に対して  $l$  の大きさを変えながら  $\Gamma(q, l)$  を求め、 $\log \Gamma(q, l)$  対

$\log l$  の両対数プロットの傾きから  $\tau(q)$  を求めることができる。

$f(\alpha)$  を用いた解析は、最初に現れた次元の低いカオス領域についておこなった。まず各励起電力について、得られている4096点のデータからスプライン補間により、20,000点の1次元データを構築した。そして  $D_2$  の解析から、この励起域での自由度は3程度であることが分かっている。ストレンジアトラクタを4次元相空間内に埋め込んだ。そして確率測度  $P_i(l)$  は、 $i$  番目の点から半径  $l$  の4次元球をつくり、その内部に含まれるデータ点の数を数えることにより求めた。この時、 $i$  として約4000点をストレンジアトラクタ上から選び、16式の平均値を求めた。また、分配関数  $\Gamma(q, l)$  を求めるために、 $q$  の値は  $-9.0$  から  $+7.0$  まで  $0.1$  刻みに計算を行った。こうして上記の方法で  $\tau(q)$  を求めた後、ルジャンドル変換を用いて  $f(\alpha)$  カーブを求めた。そして、ストレンジアトラクタは軌道の時間発展方向に自明な1次元を含んでいるので、得られた横軸の  $\alpha$  及び縦軸の  $f$  の値から、各々1次元を差し引いた。

図19(a)に  $P = 2.20\text{dB}$  の波形から得られた  $f(\alpha)$  スペクトルを示す。黒丸が今回の計算結果である。容量次元  $D_0$  の値を与えるスペクトル上の  $f$  の最大値が  $0.55 \pm 0.04$  である。スペクトルの右側は、 $q < 0$  の分配関数から得られる領域で、アトラクタの測度の小さい領域の特徴を反映している。このため、測定データの絶対数の不足から、やや大きな誤差を含む可能性がある。また、図19(a)中の実線は周期倍分岐ル

ートからカオスが発生する場合、そのオンセットで予測されている普遍スペクトルである。マグノン系のカオスも、それと大変良い一致を見せている。発振のパワースペクトルが完全にバンド状になった  $P = 3.60\text{dB}$  での  $f(\alpha)$  スペクトルを図19(b)に示す。 $\alpha = 1$  の時に、スペクトルの最大値  $D_0$  として約1.0の値を持っている。これは、ロジスティックモデルが  $x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$  の時に持つ  $f(\alpha)$  スペクトル [ (0.5, 0) 及び (1, 1) の2点だけ ] によく似ている。次に、その中間領域での  $P = 2.97\text{dB}$  で、 $f(\alpha)$  を求めるために求めた  $\log l$  対  $\log \Gamma$  を図19(c)に示す。図は  $q = 0$  の場合であり、この傾きが

$D_0$  に相当する。これを見ると、 $\log l$  が図中に示した  $R_c$  より大きい場合と小さい場合で、傾

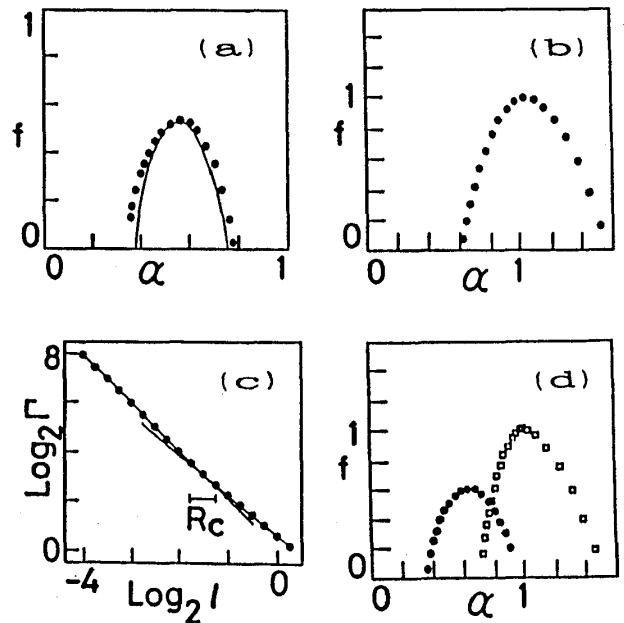


図19 実験データ  $f(\alpha)$  スペクトル

きが2種類存在することが分かる．つまりアトラクタをそのフラクタル構造で特徴付けようとすると，注目するスケールにより異なったフラクタル構造が見えることになる．これはアトラクタが一枚の帯でなく，ポアンカレ断面で見ると島状になっているためと考えられる．つまり，各島の中でのフラクタル構造と島の分布のフラクタル構造が異なり，1の領域を変えると2つの構造が分離されて特徴付けられる事を意味している．この2つの領域に分けて  $f(\alpha)$  を求めたものが図19(d)である．●の全体的に小さいスペクトルが1の大きい領域から，□の大きいスペクトルが1の小さい領域から求めたものである．●のスペクトルはカオス発生点で得られた曲線によく似ており，島の分布はカオス発生点でのフラクタル構造から大きく変化していない．一方，□のスペクトルは  $P = 3.60\text{dB}$  で得られている曲線に似ており，各島の中では構造が複雑になり  $f(\alpha)$  が高次元的な特徴を示すようになってきている．そして，励起が強くなると島が互いに融合するために，カオス発生点での特徴を示す  $f(\alpha)$  スペクトルは消滅すると考えられる．

#### §4 シミュレーション

次にマグノン系の特徴を活かして，微視的相互作用に基づくモデルハミルトニアンを作りシミュレーションを行った．今回用いたハミルトニアンはS理論をその中心としたものである<sup>19)</sup>．モデルハミルトニアンは  $\hbar = 1$  とおいた単位系で，以下の様に書き表すことができる．

$$H = \omega_p A^\dagger A + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \frac{1}{2} \sum_k (g_k A b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \text{c.c.}) + \{F \exp(-i\omega_p t) A^\dagger + \text{c.c.}\} + H_{\text{int}} . \quad (17)$$

ここで， $\omega_p$  は励起周波数， $\omega_k$  は  $k$  モードマグノンの周波数， $A^\dagger$  と  $A$  は空洞共振器内フォトンの生成消滅演算子， $b_k^\dagger$  と  $b_k$  は波数  $k$  のマグノンの生成消滅演算子である．そして， $F$  はマイクロ波強度， $g_k$  はフォトンと  $k$  マグノンとの結合定数を表している．第1項は空洞共振器内フォトンのエネルギー，第2項はマグノンの持つエネルギー，第3項は1つのフォトンが消滅して波数  $\pm k$  のマグノン対が生成される平行励起過程とその逆過程，第4項は空洞共振器内フォトンと導波管の結合をそれぞれ示している． $H_{\text{int}}$  はS理論によるマグノン間の相互作用のハミルトニアンである．ここで  $H_{\text{int}}$  として考える過程は2つのマグノンが消滅し，新しく2つのマグノンが生成される過程である．従って，2次のスール不安定性の場合と同様に，この現象は生成消滅演算子の4次の項からなる非線形相互作用となる．ただしここでは，4マグノン相互

作用の中でも対称性の高い散乱過程のみを取り入れてある。つまり、4マグノン過程の

$$H = \frac{1}{2} \sum_{1234} T_{12:34} b^*_{1} b^*_{2} b_3 b_4 \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \quad (18)$$

のうち、エネルギー縮退している  $\pm k$  と  $\pm k'$  モードの散乱過程に限定し

$$H_{int} = \sum_{kk'} T_{kk'} b^*_{k} b_k b^*_{k'} b_{k'} + \frac{1}{2} \sum_{kk'} S_{kk'} b^*_{k} b^*_{-k} b_{k'} b_{-k'}$$

$$T_{kk'} = T_{k'k} = T_{kk':kk'}$$

$$S_{kk'} = S^*_{k'k} = T_{k-k:k'-k'} \quad (19)$$

で表せる相互作用を中心に考える。ここで、 $T$  と  $S$  は相互作用の強さを示す定数である。今、17式の第2, 3, 5項を書き出すと、

$$H = \sum_k \omega_k b^*_{k} b_k + \frac{1}{2} \sum_k (g_k A b^*_{k} b^*_{-k} + c.c.) + H_{int} \quad (20)$$

となる。 $H_{int}$  を分解して書き直すと

$$H = \sum_k (\omega_k + \sum_{k'} T_{kk'} b^*_{k'} b_{k'}) b^*_{k} b_k + \frac{1}{2} \sum_k \{ (g_k + \sum_{k'} S_{kk'} b_{k'} b_{-k'}) b^*_{k} b^*_{-k} + c.c. \} \quad (21)$$

となる。つまり4マグノン項の内、 $T$ 項は $k$ モードのエネルギーシフトを、 $S$ 項は他モードが $\pm k$ モードを励起する効果を表している。 $S$ 理論では、この $S$ 項による内部励起とマイクロ波励起との間の位相のずれにより、 $\pm k$ モードの増加が非線形に抑圧されるとしている。

ここまでは量子論的描像からハミルトニアンを求めてきたが、自励発振が起きるほどの高励起下では多くのマグノンがこの力学系に関与しており、各演算子を古典複素変数と考えてよい。さらに、現象論的に減衰項を導入すると以下の運動方程式を得ることができる。

$$\frac{dA}{dt} + \Gamma A = -i \frac{\partial H}{\partial A^*}$$

$$\frac{d b_k}{d t} + \gamma_k b_k = -i \frac{\partial H}{\partial b_k^*} \quad (22)$$

第1式はフォトンの運動方程式，第2式はkモードマグノンの運動方程式である． $\Gamma$ ， $\gamma_k$ はそれぞれフォトンとマグノンの減衰定数である．今，数10kHzから数MHzの自励発振について興味があり，マイクロ波振動数 $\omega_p$ （約10GHz）の成分を除くために $\omega_p$ に比べて緩やかに変化する変数

$$A = \tilde{A} \exp(-i\omega_p t)$$

$$b_k = c_k \exp\left(\frac{-i\omega_p}{2} t\right) \quad (23)$$

を導入する．第2式の指数部が $1/2 \cdot \omega_p$ で変動するのは，マグノンの励起に平行励起法を用いたので， $\omega_k \sim 1/2 \cdot \omega_p$ の関係があるためである．22式を計算し，23式を代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{d \tilde{A}}{d t} + \Gamma \tilde{A} &= -i \left( F + \frac{1}{2} \sum_k g_k^* c_k c_{-k} \right) \\ \frac{d c_k}{d t} + \gamma c_k &= -i \left\{ \Delta \omega_k c_k + g_k \tilde{A} c_{-k}^* + 2 \sum_{k'} T_{kk'} (c_{k'}^* c_{k'}) c_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k'} S_{kk'} (c_{k'} c_{-k'}) c_{-k}^* \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

を得る．ここで $\Delta \omega_k = \omega_k - 1/2 \cdot \omega_p$ である．更に空洞共振器内のフォトン $\tilde{A}$ はマグノンモード $c$ に断熱追従すると仮定する．これは，空洞共振器のQ値が余り大きくない場合に相当する． $d \tilde{A} / d t = 0$ より，次式が得られる．

$$\tilde{A} = -\frac{i}{\Gamma} \left( F + \frac{1}{2} \sum_{k'} g_{k'}^* c_{k'} c_{-k'} \right) \quad (25)$$

25式を24式の第2式に代入する．さらに $c_k = c_{-k}$ として， $-i/\Gamma = Q$ ， $-i/(2\Gamma) = E$ とおくと，最終的にはkモードのマグノン $c_k$ についての運動方程式として

$$\frac{d c_k}{d t} = -\gamma_k c_k - i \Delta \omega_k c_k - i Q F g_k c_k^* - i \left\{ 2 \sum_{k'} T_{kk'} |c_{k'}|^2 c_k + \sum_{k'} (S_{kk'} + E g_k g_{k'}^*) c_{k'}^2 c_k^* \right\} \quad (26)$$

を得る。この運動方程式から運動力学に関与するモードの数だけの連立方程式を立て、その式を数値計算することになる。数値積分は大型計算機で倍精度自動刻みのルンゲクッタ法を用いて行った。なお、各モードの初期値に適当な値を選び、最初の数千ステップを過渡現象として捨て、その後のデータ点を以下の解析に用いた。

今回は、2つのマグノンモードが運動力学に関与していると考えたモデル（2モードモデル）で、周期倍分岐ルートからカオスが発生するパラメータを詳しく解析した<sup>12)</sup>。用いたモデルの概念図を図20に示す。マイクロ波は $\pm k_1$ モードだけを励起しており、 $\pm k_2$ モードは $S_{12}$ 及び $T_{12}$ を通して非線形に $\pm k_1$ モードと結合されている。そして励起エネルギーは、フォトン、 $k_1$ モード及び $k_2$ モードを通して最終的には熱浴に流れ出る。なお、マグノンモードを記述する $c_1, c_2$ は共に複素変数であるので、この力学系の自由度は4となる。計算に用いたパラメータ値を次に示す。

$g_{k_1} = 0.2 i \times 10^6$ ,  
 $g_{k_2} = 0$ ,  $\Gamma = 1.0 \times 10^8$ ,  $\gamma_{k_1} = 0.1 \times 10^5$ ,  
 $\gamma_{k_2} = 0.2 \times 10^5$ ,  $T_{11} = -0.5 \times 10^{-8}$ ,  
 $T_{22} = 0.25 \times 10^{-8}$ ,  $T_{12} = T_{21} = 2.0 \times 10^{-8}$ ,  
 $S_{11} = -0.5 \times 10^{-8}$ ,  
 $S_{22} = 0.25 \times 10^{-8}$ ,  $S_{12} = S_{21} = 4.5 \times 10^{-8}$ ,  
 $\Delta \omega_1 = \Delta \omega_2 = 0 \text{ (sec}^{-1}\text{)}$ 。

これらのパラメータを固定し、励起パラメータ $F$ を増加させると周期倍分岐からカオスが発生する。 $F$ は $10^7$ の桁なので、計算に用いた値の $10^{-7}$ 倍を用いて励起の強さを表記することにする。図21に $F$ を変化させたときの2次元相空間（ $c_1$ の実数部- $c_1$ 虚数部の平面）での軌道、そして図22に発振波形のパワースペクトルを示す。 $F = 1.922$ は $2^4$ 周期、 $F = 1.92286$ はカオ

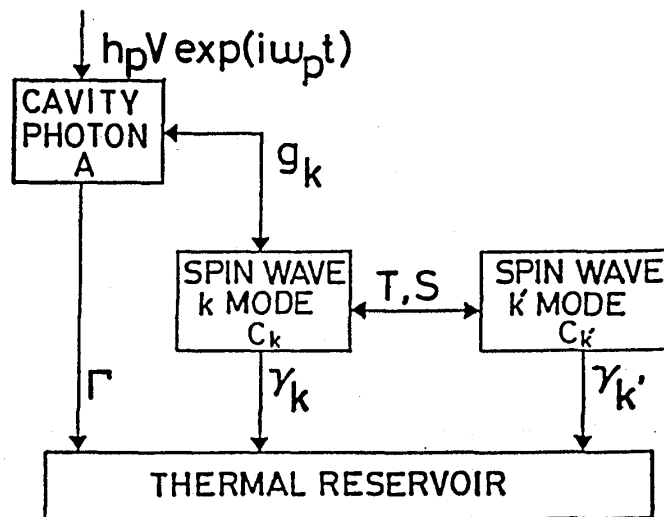


図20 自励発振機構のモデル

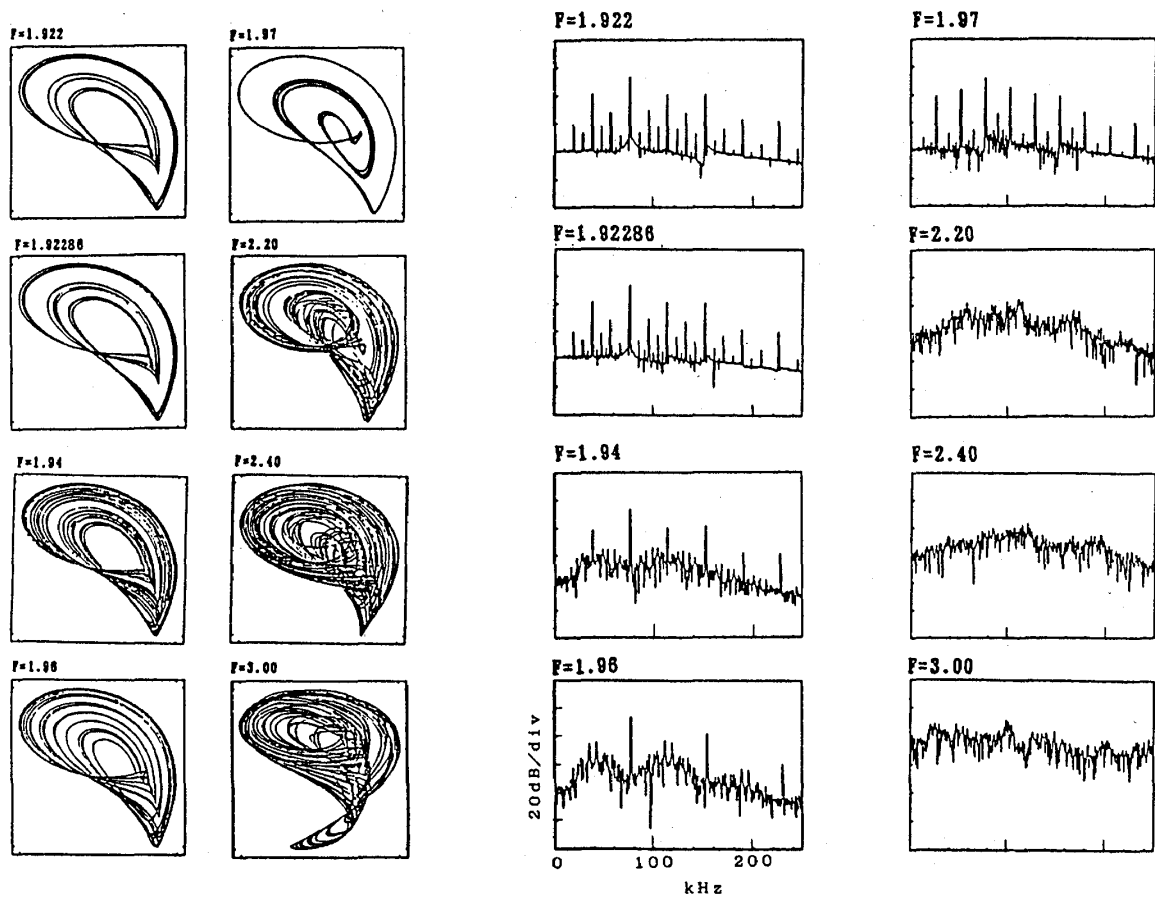


図21 アトラクタ (シミュレーション)

図22 パワースペクトル (シミュレーション)

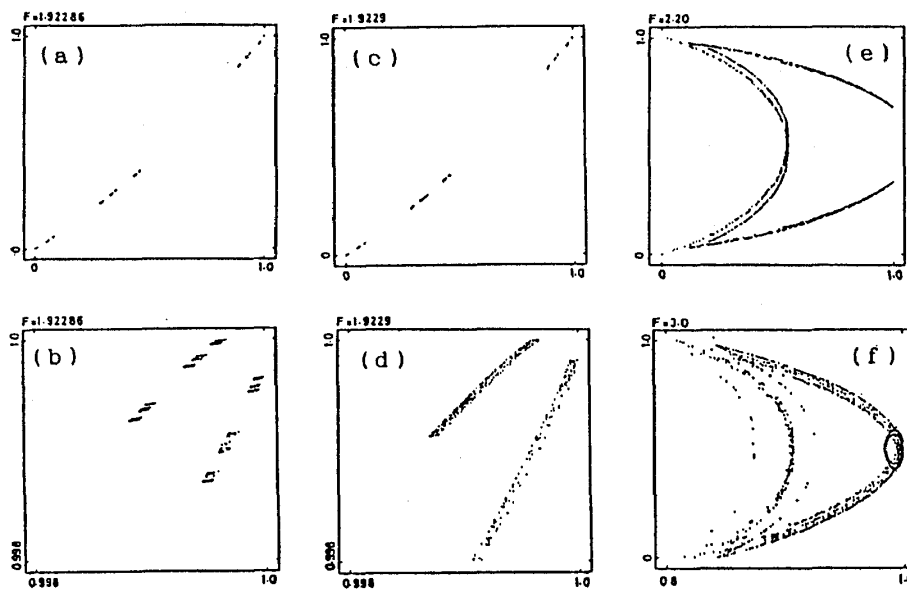


図23 ポアンカレ断面 (シミュレーション)

ス発生点,  $F = 1.94$ は発達した低次元カオス,  $F = 1.97$ は周期振動,  $F = 2.20, 3.00$ はより複雑な非周期振動を各々捉えている. 次に  $c_1$ の実数部を一定とした3次元ポアンカレ断面のデータを,  $c_1$ の虚数部対  $c_2$ の実数部の複素平面に投影したものを図23に示す.  $F = 2.92286$ での断面図23(a)を見ると, いくつかの点から形成されていることが分かる. 右上部の拡大図23(b)から, 交点は $2^7$ 個程度の島を形成し, 各島の内部にも微細構造があることが分かる. 但し, 今回の計算精度では島内部の微細構造を直接見ることはできない. このポアンカレ断面図から, この励起強度がカオス発生点であると決定した. 図23(c,d)から,  $F = 1.9229$ で見えていた島が, 伸びながら互いに融合していく様子が捉えられている. そして, 励起をさらに強くしたときに現れる非周期振動からは, 今までの断面に比べて複雑な構造を持ったポアンカレ断面が得られている.  $F = 2.20$ , 及び  $F = 3.0$ での断面図を見ると, 低励起でのストレンジアトラクタには厚み方向の構造があまり無かったのに対して, この方向にも対称的な幾何学構造を持つことが分かる.

このシミュレーションで得られたデータに対して,  $f(\alpha)$  スペクトルによる解析をおこなった. 各ポアンカレ断面上のデータ8,000点を用いて, 実験データと同様にルジャンドル変換からスペクトルを求めた. 図24(a)はカオス発生点と考えられる  $F = 1.92286$ のデータから得られたスペクトルである. 実験の場合と同様に, 周期倍分岐ルートの普遍カーブとよく一致している.  $F = 1.94$ では, 実験データの  $P = 3.6$

0dBのスペクトルとよく似た曲線が得られている(図24(b)).  $F = 1.9229$ では図24(c)に示すように  $\log l$  対  $\log \Gamma$  のプロットから2種類の傾き  $\tau_0$  が得られ, その結果として  $f(\alpha)$  も図24(d)の様に2種類求まることになる. 右側の大きい  $f(\alpha)$  カーブが  $l$  の小さい領域から得られたもの, 左の小さい  $f(\alpha)$  が  $l$  の大きい領域で得られたスペクトルである. 励起をさらに強くした領域で, 再び現れる非周期振動にも同様な解析を試みたが, エラーバーが大きくなりスペクトルを決定することはできなかつた. この誤差の発生には, 主としてルジャンドル変換を行う前の  $\tau(q)$  の決定過程が大きな比重を占め

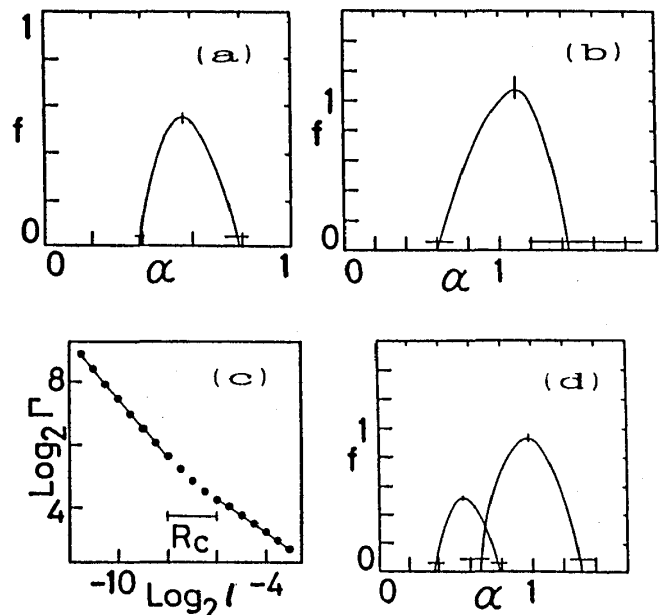


図24

$f(\alpha)$  スペクトル (シミュレーション)



ている。つまり、 $\log I$  対  $\log \Gamma$  プロットの、どの領域の傾きを  $\tau(q)$  として採用するかにかかっている。特にスペクトルの右下の部分は、 $q$  の小さい値つまりアトラクタの内でも密度の薄い領域でのフラクタル構造を反映するために、もとのデータ点数が少ないと決定が困難となる。全体の傾向としては相関次元を求めた場合と同様に、アトラクタの次元が高くなるに従って  $f(\alpha)$  スペクトルの決定も困難となる。なお  $F = 2.20\text{dB}$  ではポアンカレ断面の  $D_0$  の値は約 1.8 と見積られており、系の自由度が大きくなってポアンカレ断面の構造が大きく変化していることを示している。

## § 5 まとめ

今回の実験データからは、相関次元の変化や、ストレンジアトラクタの折り畳みと引き伸ばし構造、さらには  $f(\alpha)$  スペクトルまで得られている。実際の実験データからこれほどの定量的な特徴付けができる力学系は少なく、マグノン系はカオスの研究に大変有利な力学系であることが分かる。実験では 4 周期及び 8 周期軌道を直接的には捕らえることができていない。しかし、ローレンツプロットの形、およびカオス発生点での  $f(\alpha)$  スペクトルが周期倍分岐の普遍カーブと一致することなどから、今回実験で得られた非周期振動は周期倍分岐からのカオスであると考えられる。

またストレンジアトラクタの次元から力学系の自由度の下限を予測することができる。これより最初に現れるカオスの相関次元  $D_2$  は 2 ~ 3 次元程度であり、2 つのマグノンモードがこの領域で観測された振動を支配していると考えられる。更に、2 モードモデルによるシミュレーションで実験をほぼ再現できることも、これを強く裏付けている。2 度目に現れるカオスは明かに自由度が大きくなっており、3 モードあるいは 4 モードのシミュレーションとの比較が重要となるであろう。実験で得られるデータは 1 変数時系列データであり、シミュレーション結果と比較する場合は、その方法を考慮しなければならない。つまり、実験データはマグノンとフォトンとの非線形結合や、マイクロ波検波器の特性等の変調がかかっているために、直接波形やアトラクタの形を比べることはできない。従って、カオス的解析手法を用いてカオス状態の特徴付けを行う必要がある。

カオス発生点直後では、ストレンジアトラクタを調べるスケール領域によって 2 つの  $f(\alpha)$  カーブが得られることは、ロジスティックマップからも確かめられている<sup>20)</sup>。これは、周期倍分岐ルートで予測されている普遍カーブはカオス発生臨界点のアトラクタ、つまり  $2^\infty$  周期軌道について得られるスペクトルである。カオス発生点直後の領域ではアトラクタは  $2^n$  個のバン

ドから成り立っている。このため、各バンド間の平均距離を  $r_c$  とすれば、 $r_c$  より大きいスケールでは臨界点での特徴がバンドの分布から得られることになる。そして、 $r_c$  より小さいスケールではバンド内の軌道の分布から、新しいカオス領域の特徴が捉えられることになる。さて、シミュレーションと実験の比較を行いたいとする立場からは、 $r_c$  より小さいスケール域で得られる次元の高い  $f(\alpha)$  スペクトルに注目する必要がある。これは、 $r$  の大きいスケール域からは普遍スペクトルが期待される訳であるから、このスペクトルからは各力学系の個性を掴むことができないためである。実験データの  $P = 3.60\text{dB}$  から得られた  $f(\alpha)$  スペクトルは、ロジスティックモデルで  $\mu = 4$  とした場合のスペクトルにほぼ一致している。これは、アトラクタの横方向（ポアンカレ断面で見えている線分方向）の軌道分布を特徴付けているためと思われる。従って、ストレンジアトラクタの厚み方向の構造を知ることが、このマグノン系を更に詳しく特徴付けるために必要となる。しかしながら、ここまでの解析ではそれを捉えることができていない。これは、最初に観測されたカオス領域ではアトラクタの相関次元が  $D_2 = 2.0$  程度と2次元平面的であり、ストレンジアトラクタの折り畳み構造から期待される  $2.0 < D_2 < 3.0$  の値が得られていないことから結論付けられることである。このことは、シミュレーション結果の  $f(\alpha)$  解析についても同様である。 $F = 1.94$  の  $f(\alpha)$  スペクトルからは容量次元  $D_0$ （スペクトルカーブの頂点の値）として、やはり1程度の値が得られている。これは、厚み方向に存在するであろうフラクタル構造の特徴を捉えていないことを示唆している。一方、 $F = 2.20, 3.0$  ではそのポアンカレ断面に、厚み方向の構造を見ることができている。しかしながら、この領域では  $\tau(q)$  とルジャンドル変換の収束が悪く、 $f(\alpha)$  スペクトルを求めることはできていない。従って、今後この領域での解析が課題と成るであろう。

この他にも、平行励起の特徴を活かして、外部静磁場を変化させることにより最初に励起されるマグノンモードを変える実験も行った。この場合、マイクロ波電力と静磁場等の実験パラメータの変化により、間欠カオスや準周期発振などの変多様な振舞いが捉えられている。このことは、磁気的な異方性やマグノン間相互作用の波数依存性が、自励発振に強く影響を与えていることを意味し、物性的にも大変興味ある結果となった。また励起マイクロ波に振幅変調を加えた励起下では、自励発振の引き込み現象及び準周期からのカオスの発生が捉えられ、カオスを調べる上でもマグノン系は有利かつ興味深い力学系であることが確認されている。

本文は大学院での研究の一部をまとめたもので、岡山大学山崎比登志教授及び福岡工業大学中村勝弘教授に多くの御指導を頂きました。ここに厚く御礼申し上げます。

## 参考論文

- 1) S.Ohta and K.Nakamura: J.Phys.C,16(1983)L605.
- 2) G.Gibson and C.Jeffries: Phys.Rev.A,29(1984)811.
- 3) P.Bryant, C.Jeffries and K.Nakamura: Phys.Rev.A,38(1988)4223.
- 4) S.M.Rezende, F.M.de Aguiar and A.Azevedo: J.de Physique,49(1988)C8-1605.
- 5) X.Y.Zhang and H.Suhl: Phys.Rev.B,38(1988)4893.
- 6) H.Benner, F.Rodelsperger, H.Seitz and G.Wiese: J.de Physique,49(1988)C8-1603.
- 7) G.Wiese and H.Benner: Z.Phys.B,79(1990)119.
- 8) R.D.McMichael and P.E.Wigen: Phys.Rev.Lett.,64(1990)64.
- 9) M.Warden and F.Waldner: J.Appl.Phys.,64(1988)5386.
- 10) A.I.Smirnov: Sov.Phys.-JETP,67(1988)969.
- 11) H.Yamazaki: J.Appl.Phys.,64(1988)5391.
- 12) M.Mino, H.Yamazaki and K.Nakamura: Phys.Rev.B,40(1989)5279.
- 13) H.Yamazaki and M.Mino: Prog.Theor.Phys.,98Supplement(1989)400.
- 14) S.Mitsudo, M.Mino and H.Yamazaki: J.Phys.Soc.Jpn.,59(1990)4231.
- 15) 長島弘幸: 日本物理学会誌,41(1986)19.
- 16) K.Tomita and T.Kai: J.Stat.Phys.,21(1979)65.
- 17) P.Grassberger and I.Procaccia: Physica,9D(1983)189.
- 18) T.C.Halsey, M.H.Jensen, L.P.Kadanoff, I.Procaccia and B.I.Shraiman:  
Phys.Rev.A,33(1986)1141.
- 19) V.E.Zakharov, V.S.L'vov and S.S.Starobinets: Sov.Phys.-Ups.,17(1975)869.
- 20) 富永広貴 森肇: 日本物理学会1990年秋分科会予稿集第3分冊p409.