るのが遅れるためである。また、最初に起こる不安定な振動は、全てのドメインが同じように広がったり、縮んだりする振動である。

３章では局在定常解とパルス解について考える。パラメータはＤに注目する。計算機実験から、u が局在するようなある初期値を与えたとき、ある適当なパラメータの下では局在定常解に達するが、別のパラメータの下では空間を伝播する二つのパルス波に分かれることがわかっている。

このような振舞いの違いは v の拡散定数を小さくした事による。抑制因子の拡散がすみやかに起これば、時間発展しようとする u を抑えることができる。局在定常解とパルス解を求め、それらの存在する範囲、形状を調べ、計算機実験に示されたような様な振舞いの違いの必然性を認めた。

2. 経路積分法によるブラウン運動の研究

川 崎 晴 美

物理現象のなかには、ランダムに変動する力を受けてブラウン運動をするものが非常に多く、しばしばフォッカー．プランク方程式で記述される。この方程式の解がわかれば、平均量や相関などの様々な物理量を求めることができる。しかし、拡散項やドリフト項が変数に依存していたり、また多変数である場合にはこれを解析的に解くことは困難である。

ところで、ランジュバンはブラウン運動をする粒子の速度ｖが微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu v + \gamma(t,\omega) \qquad (1)$$

に従うとした。ここで、m は粒子の質量、 μ は運動摩擦係数、 γ は乱雑力で白色雑音である。しかし白色雑音過程というものは、 現実には存在し得えない。よって、これを右辺に含むランジュバン方程式(1)は厳密には意味のないものとなる。

そこで、(1) 式をブラウン運動過程（ ウィナー過程 ）Ｂを用いて

$$\begin{aligned} m\,dv &= -\mu v\,dt + \gamma(t,\omega)\,dt \\ &\Rightarrow -\mu v\,dt + dB \end{aligned} \qquad (2)$$

という形の微分方程式で表現することにする。(2)式は、確率微分方程式と呼ばれるもので、一般には、

$$d X(t,\omega) = \sigma(t, X(t,\omega))\, dB + b(t, X(t,\omega))\, dt \qquad (3)$$

と表され、(3)式に対応するフォッカー．プランク方程式が存在することがわかっている。このフォッカー．プランク方程式と等価な確率微分方程式から出発し、確率過程における基本公式を用いることによって、推移確率密度を経路積分の形に求めることができた。

そこで、まず初めにブラウン運動の性質と確率過程の重要な基本公式について述べ、それらを使って推移確率密度を求めることにする。次に、経路を数値的に発生させて解く方法を述べ、解析解のある3つのモデルについて計算し、解析解と比較し有用性を示す。さらに、経路の発生のしかたによって計算に必要な経路数を減らすことができるので、その近似方法とその方法が使える条件について述べる。

以上により、経路積分による方法が非常に有用であることがわかった。そこで応用例としてスピンのブラウン運動を考えることにする。物質中で各スピンは、周囲から時間的にランダムに変動する様ざまな相互作用を受けている。例えば、双極子相互作用などがその例である。従って、スピンの運動を取り扱うのが非常に難しい。

通常の取り扱いでは確率過程を導入し、スピンが周囲の環境から受ける相互作用をランダムな磁場によって表す。この時スピンの運動は次のような形の運動方程式で記述される。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \gamma(\mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}'(t)) \times \mathbf{M} \qquad (4)$$

ランダムに変動する磁場による摩擦を受けて、スピンは球面上をブラウン運動する。しかし、(4) 式では正しい平衡状態を記述できない。

この論文では、 Landau と Lifshitz らによって導入された摩擦項を含む次のような運動方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \gamma\mathbf{H} \times \mathbf{M} - \eta(\mathbf{H} \times \mathbf{M}) \times \mathbf{M} \qquad (5)$$

に従ってブラウン運動する非線形スピン緩和を考えることにする。上式は久保．橋爪[1)]がブロッホ方程式を導く際に用いたものである。

今回この非線形スピン緩和を取り扱うのに、確率過程の基本公式と経路積分による方法を用いて、確率分布、平均、揺らぎなどを求めたが、 $<S_z>_{eq}$ なども含めて、理論値と非常に良く一致した。

またこの方法はスピンのまわりの環境が量子系の場合にも適用でき、有限温度の効果をも論ずることが可能であるので、これについても検討する。

3. 確率微分方程式の数値解法

黒 田 朱 美

自然現象には、確率過程を用いて考察できる現象が多くあり、しばしば、フォッカー・プランク方程式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\sigma^2(x)P(x,t)\right\}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{b(x)P(x,t)\right\} \tag{1}$$

で記述される。この方程式を解けば、さまざまな情報を得ることができる。しかし、フォッカー・プランク方程式を解くことは、拡散項が非線形であったり、境界が特異点であるときには困難である。

一方、伊藤型の確率微分方程式

$$dX(t)=b(X(t))dt+\sigma(X(t))dB(t) \tag{2}$$

は、フオッカー・プランク方程式(1)と同等であり、この式を用いて数値計算をすることは、比較的簡単にできると思われる。そこで本修士論文では、(1)式のままでは解くことの困難な確率分布を求めるために、伊藤型の確率微分方程式を利用して、数値的に解く方法を確立し、さらに計算法の妥当性を吟味した。

確率微分方程式を用いて数値計算を遂行するには、(2)を差分化したとき、右辺の第2項目にあらわれる$(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$が、平均が0、分散が$(t_{k+1}-t_k)$に等しい$Gauss$分布に従うことに注目すればよい。$(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$に$Gauss$乱数を代入して差分方程式を計算する。計算回数を多くとれば、時刻tでの確率分布を得ることができる。

ところで、上述の計算法は、常微分方程式の数値解法の1つである$Euler$公式とよく