○お茶の水女子大学大学院理学研究科物理学専攻

1. 興奮反応拡散系におけるパターンダイナミクス

伊　藤　　綾

系の状態量の時間変化が反応による生成・消滅と拡散によって表わされる反応拡散方程式は、化学反応を記述するモデルとして導入された。しかし、この方程式で記述される系は化学反応にとどまらない。

Bonhoeffer-van der Pol 型反応拡散方程式（ＢＶＰ方程式）は

$$\varepsilon\tau\partial_t u = \varepsilon^2\partial_x^2 u + f(u) - v$$

$$\partial_t v = \varepsilon D\partial_x^2 v + \beta u - \gamma v \qquad (1)$$

但し、D, ε, τ, β, γ　：　正の定数

である。ここに f(u)は u の三次関数で系に非線形性を与える。

この方程式はまず二変数まで簡略化した Belouzov-Zabotinsky 反応のモデルで

ある。また、$\varepsilon D=\gamma=0$の時、神経細胞のパルス伝達に対する FitzHugh-Nagumo 方程式、 v が一定のときは、時間依存 Ginzburg-Landau 方程式(TDGL方程式)となっている。TDGL方程式は、臨界現象や二元合金の相分離過程のモデルである。このようにBVP方程式は、非平衡(開放)系でのパターン形成と自己組織化に対する典型的なモデル方程式である。

(1)は,大ざっぱには u が増えれば v も増え、今度は v の増加が抑制となって u が減少するという振舞いを示す。この事から u は活性因子、v は抑制因子と呼ばれる。(1)で記述される系は多くの場合、興奮領域($u>0$)と休止領域($u \lesssim 0$)の二つの状態をもつ。

本論では興奮領域と休止領域がつくる空間パターンに注目し、系の振舞いについて調べる。解析は、1次元空間で行なう。

まず、2章ではパラメータ τ に注目し、空間周期解の安定性を調べる。1次元BVP方程式の解として、無限媒体中に1つの定常な興奮ドメインが存在する場合がある。パラメーターの値を適当に与えると、このドメインが振動することは、先に Koga-Kuramoto によって示されている。

ここでは、ドメインが周期的に存在する場合について考える。(1)式で $\varepsilon\tau$ の値が十分大きく、u に比べ v の緩和が非常に速い時、系は興奮ドメインと休止ドメインで交互に埋めつくされた空間周期的な定常解を持つ。τ の値を小さくしていくとこの周期解はどうなるだろうか?

これを調べるために、興奮ドメインと休止ドメインの境界(界面)に注目し、特異摂動法を用いて、界面の運動方程式を導出した。一般に、ある系の振舞いを調べるには、全空間での状態量を時間で追わなければいけない。しかしここでは、界面に注目しその運動を調べる事により、界面によって区切られた興奮ドメインと休止ドメインのつくる空間パターンがどのように変化するか、という形で系がどう振舞うかを調べる事ができる。

この運動方程式を解析した結果、τ がある値 τ_c 以下では空間周期的な定常解は安定に存在できなくなり、全てのドメインが不安定な振動を始める事がわかった。これは v の時間変化が遅く、界面が動くことによる u の急激な増加を抑え

るのが遅れるためである。また、最初に起こる不安定な振動は、全てのドメインが同じように広がったり、縮んだりする振動である。

３章では局在定常解とパルス解について考える。パラメータはＤに注目する。計算機実験から、ｕ が局在するようなある初期値を与えたとき、ある適当なパラメータの下では局在定常解に達するが、別のパラメータの下では空間を伝播する二つのパルス波に分かれることがわかっている。

このような振舞いの違いは ｖ の拡散定数を小さくした事による。抑制因子の拡散がすみやかに起これば、時間発展しようとする ｕ を抑えることができる。局在定常解とパルス解を求め、それらの存在する範囲、形状を調べ、計算機実験に示されたような様な振舞いの違いの必然性を認めた。

2. 経路積分法によるブラウン運動の研究

川　崎　晴　美

物理現象のなかには、ランダムに変動する力を受けてブラウン運動をするものが非常に多く、しばしばフォッカー．プランク方程式で記述される。この方程式の解がわかれば、平均量や相関などの様々な物理量を求めることができる。しかし、拡散項やドリフト項が変数に依存していたり、また多変数である場合にはこれを解析的に解くことは困難である。

ところで、ランジュバンはブラウン運動をする粒子の速度ｖが微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu v + \gamma(t,\omega) \tag{1}$$

に従うとした。ここで、ｍ は粒子の質量、 μ は運動摩擦係数、 γ は乱雑力で白色雑音である。しかし白色雑音過程というものは、 現実には存在し得ない。よって、これを右辺に含むランジュバン方程式(1)は厳密には意味のないものとなる。

そこで、(1) 式をブラウン運動過程（ ウィナー過程 ）Ｂを用いて

$$\begin{aligned} m\,dv &= -\mu v\,dt + \gamma(t,\omega)\,dt \\ &\Rightarrow -\mu v\,dt + dB \end{aligned} \tag{2}$$