2次元イジング模型のスピン相関関数とテープリッツ行列式

東北大工　田中　和之，守田　徹

1．序論

１９４４年に Onsager[1] は外場がない時の正方格子上のイジング模型の自由エネルギーを厳密に求め，比熱が転移温度において対数的に発散することを示した。現在では，相互作用があるスピン対のすべてをそれぞれボンドで結んだ時，そのボンドが端点を共有する場合を除いて決して交叉しないならば，外場がない時の２次元規則格子上のイジング模型の自由エネルギーの厳密な表式は求まり，それは有限個の積分で表わせることが証明されている[2]。

正方格子上のスピン相関関数の厳密な表式は Kaufman and Onsager[3] によって最初に得られているが，その後 Potts and Ward[4] によって，距離Ｎだけ離れたスピン間の相関はＮ行Ｎ列のテープリッツ行列式の形にまとめられることが指摘された。Wu[5] はこのスピン相関関数の漸近形，すなわちＮ行Ｎ列のテープリッツ行列式のＮの大きい時の漸近形を理論的に評価することに成功した。しかし，一般に２次元規則格子上のイジング模型のスピン相関関数はブロック・テープリッツ行列式や変形されたブロック・テープリッツ行列式の形で表わされる[6]。

本研究の目的は，ブロック・テープリッツ行列式の漸近形に対する，できるだけ一般的な理論を与えることにある。ここでは，イジング模型のスピン相関関数を表わすブロック・テープリッツ行列式がもつ性質を大きく３つに整理し，その範囲内で漸近形を計算する理論を３つの定理としてまとめる。

2．ブロック・テープリッツ行列式の漸近形

一般に何種類かの副格子から成る２次元規則格子を考える。この格子の格子点を単位胞の番号(k,j)と副格子の番号νを組み合わせて(k,j,ν)によって表わし，格子点(k,j,ν)に置かれたスピンのスピン変数を$s(k,j,\nu)$とする。ここでは，$(k,j+n,\nu)$と$(k,j+n+1,\nu)$ $(n=0,1,2,\cdots,N-1)$ の格子点のスピン間に相互作用があるものとして，スピン相関関数
$\langle s(k,j,\nu)s(k,j+N,\nu)\rangle$ を計算する。それは次のような行列式で表わされる。

$$\langle s(k,j,\nu)s(k,j+N,\nu)\rangle^2=\det\begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_{-1} & \mathbf{F}_{-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{F}_{-N+1} \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_{-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{F}_{-N+2} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{F}_{-N+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \mathbf{F}_{N-1} & \mathbf{F}_{N-2} & \mathbf{F}_{N-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{F}_0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$\mathbf{F}_n$ は次の式で与えられる２行２列の行列である。

$$\mathbf{F}_n \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-in\theta}\,\mathbf{f}(e^{i\theta}) \qquad (2)$$

$\mathbf{f}(z)$ は２行２列の行列関数であり，その関数形は体系によって決定される。特に転移温度以外の温度では，$1/R \leqq |z| \leqq R\ (R>1)$ で正則であり，$\mathbf{F}_n$ は $\mathbf{f}(z)$のローラン級数の係数である。（１）式の右辺をＮ行Ｎ列のブロック・テープリッツ行列式と言い，以下 $D_N[\mathbf{f}]$ と言う記号で表わすことにする。もし，格子点 (k,j,ν) と$(k,j+1,\nu)$ を結ぶ直線を軸として，相互作用に対して反転対称性があるならば母関数である２行２列の行列関数の非対角要素が０になることが証明できるので，この場合にはテープリッツ行列式の問題に帰着されてしまう [7]。

２次元イジング模型のスピン相関関数の表式を与えるものとしてこれまで求められたブロック・テープリッツ行列式の母関数は，すべて次の３つの条件を満足している。

（Ｉ） $\mathbf{f}(z) = \dfrac{1}{d(z)}\,\mathbf{n}(z), \quad \det\mathbf{f}(z)=1$

ここで，$d(z)$はスカラー関数であり，$\mathbf{n}(z)$は次のような形の２行２列の行列関数である。

$$\mathbf{n}(z) = \sum_{m=-M}^{+M} \mathbf{N}_m z^m$$

以上のことから$d(z)^2=0$は 2M 次方程式である。

（Ⅱ） $\mathbf{n}(z)$は単位円の近傍で正則かつ逆行列が存在する。

（Ⅲ） $\mathbf{n}(z)$の要素には次のような関係がある。

$$n_{11}(z)=n_{22}(z^{-1}),\quad n_{12}(z)=n_{12}(z^{-1}),\quad n_{21}(z)=n_{21}(z^{-1}),$$

（Ｉ）と（Ⅲ）から$d(z)^2=0$は 2M 次相反方程式である。

M＝１の場合を最初に扱ったのは McCoy and Wu[8] であり，その後 Wolff and Zittartz [9] によって行列 **n**(z)を対角化することによって一般のテープリッツ行列式の問題に帰着することができることが指摘された。また，M＝２の場合を最初に扱ったのは Au-Yang and McCoy[10] である。この計算は **f**(z)の具体的な表式がを使われており，他の問題に適用するには適していない。我々は最近，M≦２の場合の一般的な定式化を行なった[11]。主な結果は以下の３つの定理にまとめられた。

まず，以下に述べる定理１を使うことにより，**f**(z)の特異点すなわち $d(z)^2=0$ の零点を使って行列 **f**(z)をある形に因数分解する。そして，その形を使って，ブロック・テープリッツ行列式を一般のテープリッツ行列式の問題に帰着する。その過程を定理としてまとめたのが定理２及び３である。いずれの定理においても重要なことは，転移温度以外の温度では **f**(z)の特異点すなわち $d(z)^2=0$ の零点が決して単位円周上に来ないということである。

定理１では，複素数 z の２行２列の行列関数 **a**(z)を考える。

$$\mathbf{a}(z) = \sum_{n=-L}^{L} \mathbf{A}_n z^n \qquad (L=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

a(z)は $1/R \leq |z| \leq R$ $(R>1)$ で正則であり，逆行列が存在すると仮定する。更に，行列の要素 $a_{ij}(z)$ について次の関係があると仮定する。

$$a_{11}(z)=a_{22}(z^{-1}),\quad a_{12}(z)=-a_{12}(z^{-1}),\quad a_{21}(z)=-a_{21}(z^{-1}) \tag{4}$$

すなわち

$$\mathbf{a}(z)^{-1}=\{\det \mathbf{a}(z)\}^{-1}\mathbf{a}(z^{-1}) \tag{5}$$

この時，次の定理が成り立つ。

【定理１】 L を正整数であるとする。det **a**(z)の相異なる零点 α，β $(\alpha\beta\neq 1)$ が次の関係を満足すると仮定する。

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{11}(\beta) & a_{12}(\beta) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

この時，**a**(z)は次のように因数分解できる。

$$\mathbf{a}(z)=\mathbf{V}^{-1}\begin{pmatrix} 1-\alpha z & 0 \\ 0 & 1-\beta z \end{pmatrix}\mathbf{b}(z)\begin{pmatrix} 1-\beta/z & 0 \\ 0 & 1-\alpha/z \end{pmatrix}\mathbf{V} \tag{7}$$

$$\mathbf{V} \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{11}(\beta) & a_{12}(\beta) \end{pmatrix} \tag{8}$$

更に，２行２列の行列関数 $\mathbf{b}(z)$ は

$$\mathbf{b}(z) = \sum_{n=-L+1}^{L-1} \mathbf{B}_n z^n \quad (L=0,1,2,\cdots) \tag{9}$$

という形をもち（４）と同じ条件を満足する。

この定理を $M=2$ として（Ｉ）における $\mathbf{n}(z)$ に２回適用することにより $\mathbf{f}(z)$ を次のような形に因数分解することが可能になる。

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} 1-\alpha z & 0 \\ 0 & 1-\beta z \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda(z) & 0 \\ 0 & \lambda(z^{-1}) \end{pmatrix} \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1-\beta/z & 0 \\ 0 & 1-\alpha/z \end{pmatrix} \mathbf{V}$$

$$(|\alpha| < 1/R,\ |\beta| < 1/R,\ (R>1)) \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{U}$ と $\mathbf{V}$ は２行２列の行列であり，逆行列が存在する。$\lambda(z)$ は $1/R \leqq |z| \leqq R$ で正則である。

さらに，$\mathbf{f}(z)$ が（１０）式の形に表わされた時，次の２つの定理が成り立つ。

【定理２】 $\ln\lambda(z)$ が $1/R \leqq |z| \leqq R$ で正則であり，

$$\Xi \equiv \frac{1}{(1-\alpha\beta)\det\mathbf{U}} \left[\frac{U_{11}U_{22}}{\lambda_+(\alpha)\lambda_-(\beta^{-1})} + \frac{U_{12}U_{21}}{\lambda_+(\beta)\lambda_-(\alpha^{-1})} \right] \tag{11}$$

が０でないと仮定する。この時，$D_N[\mathbf{f}]$ の漸近形は次のように与えられる。

$$\frac{D_N[\mathbf{f}]}{\exp[2NK_0]} = \Xi^2 \exp\left[2K_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} nK_n K_{-n} \right] \left\{ 1 + O(R^{-2N}) \right\} \quad (N \to +\infty)$$

$$\tag{12}$$

ここで，K_n は $1/R \leqq |z| \leqq R$ における $\ln\{\lambda(z)\}$ のローラン級数の係数であり，$\lambda_\pm(z)$ は次のように定義される。

$$\lambda_+(z) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} K_n z^n \right), \qquad \lambda_-(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} K_{-n} z^{-n} \right), \tag{13}$$

【定理3】 $\ln(-z\lambda(z))$が$1/R \leqq |z| \leqq R$で正則であり，

$$\Theta(N) \equiv \frac{1}{2\pi i(1-\alpha\beta)\det\mathbf{U}} \int_{|z|=1} dz\, z^{-N-1}\, \omega_+(z)^{-1}\omega_-(z)$$

$$\times\left\{ \frac{U_{11}U_{22}}{\omega_+(\beta)\omega_-(\alpha^{-1})}\left(\frac{1-\beta/z}{1-\alpha z}\right) - \frac{U_{12}U_{21}}{\omega_+(\alpha)\omega_-(\beta^{-1})}\left(\frac{1-\beta/z}{1-\alpha z}\right)\right\} \qquad (14)$$

が0でないと仮定する。この時，$D_N[\mathbf{f}]$の漸近形は次のように与えられる。

$$\frac{D_N[\mathbf{f}]}{\exp[2NL_0]} = \Theta(N)^2 \exp\left(4L_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n L_n L_{-n}\right)\left\{1+O(R^{-2N})\right\} \quad (N\to+\infty) \qquad (15)$$

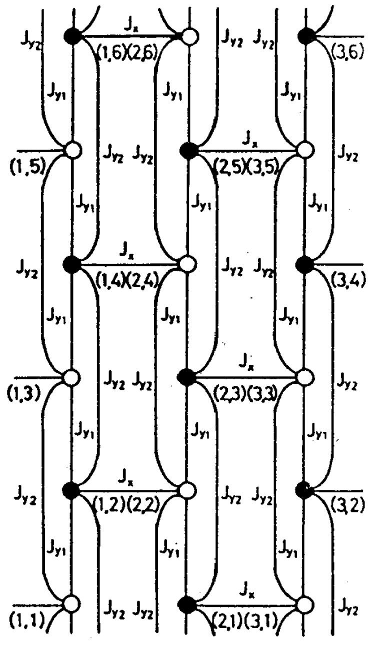
ここで，L_n は$1/R \leqq |z| \leqq R$における $\ln\{-z\lambda(z)\}$ のローラン級数の係数であり，$\omega_\pm(z)$ は次のように定義される。

$$\omega_+(z) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n z^n\right), \qquad \omega_-(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} L_{-n} z^{-n}\right), \qquad (16)$$

我々はこれらの3つの定理を第1図のような第2近接格子点間の相互作用を持つレンガ格子上のイジング模型に適用し，そのスピン相関関数 $\langle s_{1,1}\, s_{1,1+2N}\rangle$ の転移温度以外の温度における漸近形を計算することに成功した[11]。定理2，3は温度をT，転移温度をT_C として，それぞれ$T < T_C$ 及び$T > T_C$ で用いられる。

3．今後の展開

§2で述べた定式化は同じ副格子に属するスピン間の相関関数の漸近形を計算するものである。最近，Chikyu and Suzuki[12] は，ユニオンジャック格子上のイジング模型の『floating spin』間のスピン相関関数の転移温度より低い温度領域での漸近形を計算する定式化を行なった。これは変形されたブロック・テープリッツ行列式の漸近形を計算する問題であり，我々はその定式化を転移温度より高い温度領域まで拡張し[13]，さらに§2の定理2及び3との関係を明らかにした[14]。これらは，異なる副格子に属するスピン間の相関関数の漸近形の



第1図. レンガ格子上のANNNI模型

理論の確立に道を開くものであり，今後の発展が期待される。

謝辞

本報告の主要部分は，廣池和夫先生との共著論文[11]の内容である。先生に深く感謝致します。

参考文献

[1] L. Onsager, Phys. Rev. **65** (1944), 117.

[2] T. Morita, J. Phys. A:Math. Gen. **19** (1986), 1197, L1191.

[3] B. Kaufman and L. Onsager, Phys. Rev. **76** (1949), 1244.

[4] R. B. Potts and J. C. Ward, Prog. Theor. Phys. **13** (1955), 38.

[5] T. T. Wu, Phys. Rev. **149** (1966), 380.

[6] T. Morita, Prog. Theor. Phys. **83** (1990), 701.

[7] T. Morita, unpublished note.

[8] B. M. McCoy and T. T. Wu, Phys. Rev. **155** (1967), 438.

[9] W. F. Wolff and J. Zittartz, Z. Physik **B47** (1982), 341.

[10] H. Au-Yang and B. M. McCoy, Phys. Rev. **B10** (1974), 3885.

[11] K. Tanaka, T. Morita and K. Hiroike, Physica **A171** (1991), 350.

[12] T. Chikyu and M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **81** (1989), 927.

[13] K. Tanaka and T. Morita, Prog. Theor. Phys. **84** (1990), 392.

[14] K. Tanaka and T. Morita, Prog. Theor. Phys. **84** (1990), 410.