地震と自己組織化臨界現象

神戸大学・理　伊東敬祐

地震の自己組織化臨界モデル　：　地震は地殻の岩石が壊れて滑る現象である。滑った面を断層と呼ぶ。地震の大きさは、エネルギーで測っても、断層の大きさで測っても、べき分布をしている。断層はクラスターを作っていて、空間分布の相関積分はべき関数である。時間的にも、大きな地震の後に続く余震の減衰がべき的である。これらのことから、地震は自然のフラクタルの典型とされる。フラクタルな形や現象はべき乗則にのっていて、スケールを変えてみてもその性質が変わらない。スケールを変えても変わらないべき乗則を持つ点では、統計力学が扱ってきた規則－不規則合金相転移や磁気相転移も同じであり、これらは実験室のフラクタルの典型と言える。

破壊には、塑性変形を伴う ductile 破壊と、弾性波を放出する brittle 破壊とある。地震は brittle 破壊であるが、地殻では地震を伴う破壊だけでなく、地層が褶曲する ductile 破壊も同時に起こっている。brittle 破壊と ductile 破壊とは、温度、圧力、変形速度によって、動的な相転移をする。地殻に断層と褶曲とが併存していることからみて、地殻はこの動的相転移の近くの状態にあることが想像される。

実験室のフラクタルは、温度を臨界温度にコントロールして初めて現われる。自然のフラクタルは何故、相転移の臨界条件近くに、文字通り”自然に”落ち着いているのだろうか。Bakらは、自然が何故フラクタルかを説明するために、砂山崩しをモデル化して臨界点に自己組織化するセルオートマトンを考えた(1)。しきい値素子からなる正方格子を考えよう。サイト（ｉ，ｊ）の状態ｚの時間発展は次の規則による

$$z(i,j;t+1)=z(i,j;t)-4$$

$$\text{and}\quad z(i\pm1,j\pm1;t+1)=z(i\pm1,j\pm1;t)-1$$

$$\text{if}\quad z(i,j,;t)\geq 4,$$

$$\text{otherwise, no change.}$$

境界でｚ＝０の条件として、十分大きなｚから出発すると、系はやがて静止する。この状態は、砂山が滑りの臨界角に落ち着いて、辛うじて崩れないでいる状態に当たる。止まったならランダムにサイトを選らんで、そこのｚを１だけ増やす。すると、そこが不安定になって、再び上記のルールに従う時間発展が起こる。砂山の崩れに相当する。どんな初期状態から出発しても、系はこの辛うじて安定な臨界状態に落ち着く。ｚが小さな初期状態から出発して、ランダムにｚを増やしていっても、系は同じ定常状態に落ち着く。この状態は、相転移の臨界状態が示すスケーリングの性質をすべて持っているので、Bakらはこれを self-organized criticality（ＳＯＣ）と名付けた。ＳＯＣは自然や社会に何故フラクタル的な現象が多いかを説明するモデルとして、広い分野で注目され、数多くの研究が発表されてきている(2)。

BakらのＳＯＣの２次元モデルは、大塚が地震の機械シミュレーターと名付けたモデルとそっくり同じである（図１）[3]。大塚はブロック間の相互作用の強さをコントロールパラメターとしたので、相互作用が弱ければ小さな地震が独立に頻発し、相互作用が強ければ全体が引き込まれる大きな地震が起こるようになっている。ＳＯＣモデルにはコントロールパラメターがなく、丁度引き込みの臨界状態になっている。ＳＯＣモデルの状態量ｚを断層面に働く力と考えよう。断層が滑ればそこに働いていた力は解放されて、弾性的に周囲に伝わる筈である。応力はテンソルだから断層面の力をスカラー量のように扱うのは問題があるが、後に述べる抵抗回路網モデルで調べられているように、定性的には大きな差異は出て来ない。解放された力が周囲に等方的に配分されるとすれば、シミュレーターはＳＯＣモデルと全く一致する。地震間の相互作用の強さは、コントロールパラメターと考えるよりは自然調節されていると考えた方が良い。

<u>地震のマルチフラクタル</u>　：　ＳＯＣモデルは非常に単純であるが、複雑な地震のフラクタル的性質をよく説明できる。ただし、これまで述べてきたような地震のフラクタル性はフラクタルの一面であって、言ってみれば平均値だけを見ているようなものである。例えば、大きな地震のフラクタルと小さな地震のフラクタルとは同じだろうか？フラクタルの非一様性を記述するのがマルチフラクタルで、一般化されたフラクタル次元D_q又はマルチフラクタルスペクトル$f(\alpha)$で表現する。定性的には、大きなqのD_q又は小さなαの$f(\alpha)$が、大きな地震のフラクタル次元に対応する。カリフォルニアの地震について、地震の起こった場所の上に地震のエネルギーを乗せて、地震エネルギーの空間分布のマルチフラクタルを調べたところ、その一般化次元D_qは図２のようになった。この図から、大きな地震は小さなフラクタル次元１で分布しているが、小さな地震はより高いフラクタル次元でばらついて分布していることを読み取れる。

<u>破壊の抵抗回路網モデル</u>　：　ＳＯＣモデルは余りに単純化したモデルなので、地震のマルチフラクタルスペクトルまでは説明仕切れないようである。地震は基本的に固体の破壊である。固体の破壊モデルにはいくつかの種類があるが、基本的には弾性体での力の釣り合いの方程式（Lame eq.）

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)+\mu\nabla^2 u=0$$

を格子化して解いて、ある場所（ボンド）の変位量が破壊のしきい値を越したなら切れるとしている。格子は正方格子または三角格子を考え、素子となるボンドは破壊のしきい値までは弾性的に振舞い、しきい値を越すと剛性率が０になって元には戻らない。境界条件として格子の両端に変位を与え、次々にボンドを切って破壊をシミュレートする。このとき上記の方程式そのものを解くのではなく、一般には両極端として次の２つのモデルが良く調べられる。

（１）random fuse model[4]　：　$\lambda+\mu=0$　の等方性の場合で、上式は結局$\nabla^2 u=0$　のスカラー場のラプラス方程式を解くことになる。従って現象とし

ては割れ目の成長はＤＬＡ等のパターン成長と同じものになる。但し、成長の条件は成長端でのポテンシャル勾配がしきい値を越したときであり、そのしきい値をランダムに分布させるのが破壊モデルの特徴である。

しきい値の分布の形及び幅に依って、出来る割れ目のパターンが変わる。一様分布の時、しきい値を１、分布幅を±ｗ／２とすると、（ａ）ｗが小さいときは何処か１個所が切れれば割れ目が一直線に両端まで走る脆性破壊が起こり，（ｂ）ｗを大きくすると、境界の変位を増していくと次々にボンドが切れ、ある所から一気に破壊が進む brittle 破壊となり、（ｃ）更にｗをますと最後までだらだらとしか破壊が進まない ductile 破壊となる。この（ｂ）と（ｃ）の境界はシステムの大きさにも依存する（図３）。

（２）Central force model[5] ： 曲げ弾性を無視した $\mu=0$ のモデルで、ボンドは延び縮みだけのスプリングであると想定する。このときには正方格子は使えず三角格子を使って、各ノードでの中心力の釣り合いを考える。ここでは、central force model については詳述しない。

random fuse model の破壊の brittle - ductile 転移の臨界点では、破壊直前のボンドの構造がパーコレーションクラスターの構造になっているので、最初から臨界点のパーコレーションクラスターを作っておいてそこに電流を流して電流（またはボンド両端の電位差）分布を調べる研究も多く行なわれている。これらは random resistor network（ランダム抵抗回路網）と呼ばれている。ランダム抵抗回路網の電流分布のマルチフラクタルは数値シミュレーション、繰り込み群などに依って詳しく調べられている[6]。

ランダム抵抗回路の電位Ｖの分布のマルチフラクタルは、Ｖのｋ次モーメント $M(k)=\langle V^k\rangle=\Sigma n(V)V^k$ のサイズ依存性 $M(k)\sim L^{-p(k)}$ から、$p(k)=k\alpha(k)-f(k)$ を使って、 $f(\alpha)$ スペクトルを求める。$f(\alpha)$ からルジャンドル変換で D_q が求められる。地震のマルチフラクタルの D_q の上にそれ等を重ねて比較して見ると（図２）、地震のマルチフラクタルの計算誤差はかなり大きいものの、傾向が極めて良く一致していて両者が同じクラスの臨界現象であることを示唆している。

地球表面の地殻全体が変形に関して臨界点にあることを、最近 Sonnete らがＫｄＶ方程式に似た連続場のＳＯＣとして提唱している[7]。地球表面は幾つかの弾性的プレートに割れていて、割れ目であるプレート境界には複雑な割れ目のネットワーク（断層系）ができていて、そこで地震が起こる。割れ目のネットワークは臨界パーコレーションの構造を取っていて、そこで起こるエネルギー散逸（地震）の分布は、パーコレーションクラスターの電流分布と同じマルチフラクタル性を持っているようだ。

地震のような自然現象では状態をコントロール出来ないから、臨界現象の特徴である臨界点からのずれに関するスケーリングを実験的に調べることが出来ない。その点で自然が臨界点にあることの証拠を挙げる上で弱点があるが、マルチフラ

クタルのスケーリングが地震と似た現象の臨界点での構造と同じ universality class に属することが言えれば、かなり強い状況証拠になるだろう。自然は開放系で僅かの揺らぎで姿を変える。同時に巧みなバランスでその姿を保つ。地震に限らず、火山、地形。気候、生命系、宇宙の大構造に至るまで、自然は安定性と敏感性を兼ね持った動的な相転移点に自己組織化されていると考えて見たい。複雑なネットワーク系で起こる動的相転移の臨界性は統計力学としても魅力的なテーマである。

参考文献

1) P. Bak et al., Phys. Rev., A38, 364 (1988).
   伊東敬祐、科学、59, 654 (1989).
2) P. Bak and K. Chen, 日経サイエンス、21(3),22 (1991).
3) 大塚道男、地震２、24, 13 (1971).
4) B. Kahng, et al., Phys. Rev., B37, 7625 (1988).
5) S. Feng and P. N. Seng, Phys. Rev. Lett., 52, 216 (1984).
6) L. de Arcangelis et al., Phys. Rev.,B34, 4656 (1986)
   R. Blumenfeld et al., Phys. Rev. B35, 3524 (1987).
   T. Nagatani et al., J. Phys. A22, 1111 (1989).
7) D. Sornette et al., J. Geophys. Res., 95, 17353 (1990).

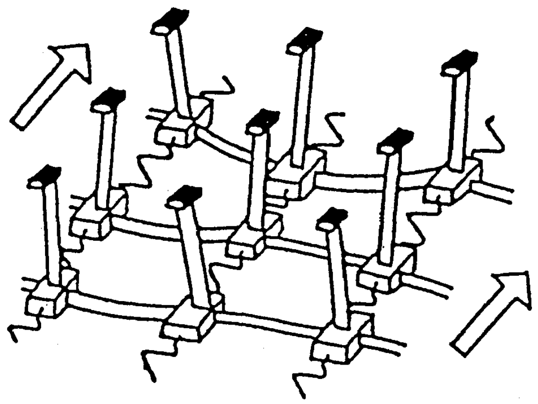

図１。地震の機械シミュレーター[3]。

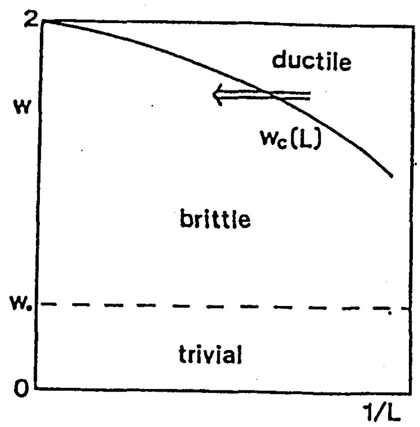

図３。randam fuse model での破壊の brittle-ductile 転移[4]。

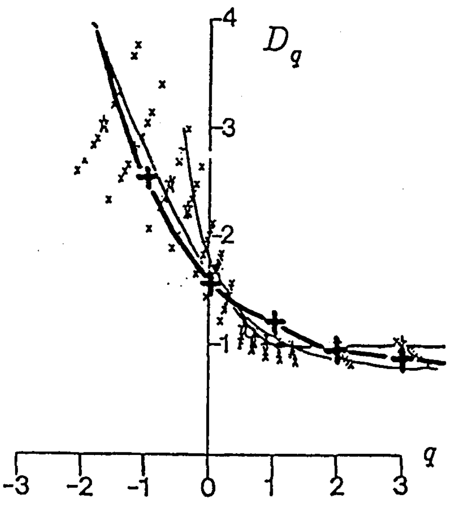

図２。×点はカリフォルニア地域の地震のエネルギー空間分布の一般化フラクタル次元 D_q。実線は randam fuse model の破壊の臨界点での電流分布（brittle-ductile 転移点での破壊直前の歪み分布と等価）の D_q。（６）による。