ランダム行列と統計力学

東京大学理学部物理学科　和達三樹、永尾太郎

1. はじめに

ランダム行列[1-3] $M = [M_{ij}]$ とは各要素がランダム変数であるような $N\times N$ 正方行列で、要素は統計分布関数 $P(M)dM$ に従って分布する。M がハミルトニアンの表現行列であるときに、固有値統計を考える。 行列 M はエルミートなので、その固有値 x_i は実数である。$P(M)$ の形を

$$P(M)dM = e^{-Trf(M)}dM \tag{1}$$

に限ると固有値の分布関数としては

$$P(x_1, \cdots, x_N)dx_1 \cdots dx_N = \prod_{i=1}^{N} e^{-f(x_i)} \prod_{i<j}^{N} | x_i - x_j |^{\beta} dx_1 \cdots dx_N \tag{2}$$

が得られる。パラメター β は M が表現するハミルトニアン H の対称性に依存し以下のように定められる。

(1) H が時間反転、空間回転について対称
　$\rightarrow M$ は実対称行列
　$\rightarrow \beta = 1$。

(2) H が奇スピン、時間反転対称、空間対称性なし
　$\rightarrow M$ は自己双対四元数行列
　$\rightarrow \beta = 4$。

(3) H に時間反転対称性なし
　$\rightarrow M$ は一般のエルミート行列
　$\rightarrow \beta = 2$。

従って、$\beta = 1/k_BT$として、次のハミルトニアン h についての一次元古典統計力学を考えれば良いことになる。

$$h = \sum_{i=1}^{N} V(x_i) - \sum_{i<j}^{N} \log | x_i - x_j | . \tag{3}$$

興味のある物理量は分配関数

$$I_0 = \frac{1}{N!} \int e^{-\beta h} dx_1 \cdots dx_N \tag{4}$$

と相関関数

$$I_k(x_1,\cdots,x_k)=\frac{1}{(N-k)!}\int e^{-\beta h}dx_{k+1}\cdots dx_N \tag{5}$$

である。　このようなハミルトニアンの固有値統計（準位統計）の理論は
(1) 複雑な原子核の高い励起状態
(2) 遅い核反応
(3) 金属微粒子の電子比熱、スピン常磁性
などの物理に適用される[3)]。

2. 古典直交多項式に関連したランダム行列アンサンブル

次のような一体ポテンシャル $V(x)$ をもつ一次元古典統計力学の分配関数（$\beta>0$）と相関関数（$\beta=1,2,4$）がすべて計算できる。
(1) Jacobi アンサンブル

$$\begin{aligned} V(x) &= -a\log(1-x)-b\log(1+x), \qquad -1<x<1,\\ &= \infty, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathit{otherwise}. \end{aligned} \tag{6}$$

(2) Legendre アンサンブル

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \qquad -1<x<1,\\ &= \infty, \qquad \mathit{otherwise}. \end{aligned} \tag{7}$$

(3) Gaussian アンサンブル

$$V(x)=\frac{x^2}{2}, \qquad -\infty<x<\infty. \tag{8}$$

(4) Laguerre アンサンブル

$$\begin{aligned} V(x) &= -a\log x+x, \qquad 0<x<\infty,\\ &= \infty, \qquad\qquad\qquad \mathit{otherwise}. \end{aligned} \tag{9}$$

これらのアンサンブルはそれぞれ次のような古典直交多項式[4)]に関連している。
(1) Jacobi 多項式

$$P_n^{(\lambda,\mu)}(x)\equiv\frac{1}{(1-x)^\lambda(1+x)^\mu}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\lambda}(1+x)^{n+\mu}\}, \tag{10}$$

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\lambda,\mu)}(x)P_n^{(\lambda,\mu)}(x)(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}dx = 2^{\lambda+\mu+1}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\delta_{mn}. \quad (11)$$

(2) Legendre 多項式　$P_n^{(0,0)}(x)$.

(3) Hermite 多項式

$$H_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{mn}. \quad (13)$$

(4) Laguerre 多項式

$$L_n^{(\lambda)}(x) \equiv \frac{x^{-\lambda}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\lambda}), \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} L_m^{(\lambda)}(x)L_n^{(\lambda)}(x)x^{\lambda}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+1)}\delta_{mn}. \quad (15)$$

3. 自由エネルギーの評価

以下では Jacobi アンサンブルを例にとり説明する。

(1) Selberg の積分[5)]

次のような積分公式が知られている。

$$\begin{aligned} S(a,b,c,N) &\equiv \frac{1}{N!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^{N} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1}\prod_{i<j} \mid x_i - x_j \mid^{2c} dx_1\cdots dx_N \\ &= \frac{1}{N!}\prod_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(1+c+jc)\Gamma(a+jc)\Gamma(b+jc)}{\Gamma(1+c)\Gamma(a+b+(N+j-1)c)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$Re\ a > 0, Re\ b > 0, Re\ c > -min\ (\frac{1}{N}, \frac{Re\ a}{N-1}, \frac{Re\ b}{N-1}).$$

これから容易に Jacobi アンサンブルの分配関数が導かれる。

$$I_0 = \frac{1}{N!}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\prod_{i=1}^{N}(1-x_i)^{a\beta}(1+x_i)^{b\beta}\prod_{i<j} \mid x_i - x_j \mid^{\beta} dx_1\cdots dx_N$$

$$= \frac{2^{\frac{\beta N(N-1)}{2}+N(a\beta+b\beta+1)}}{N!}\prod_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(1+\frac{\beta}{2}+\frac{j\beta}{2})\Gamma(a\beta+\frac{j\beta}{2}+1)\Gamma(b\beta+\frac{j\beta}{2}+1)}{\Gamma(1+\frac{\beta}{2})\Gamma(a\beta+b\beta+2+\frac{\beta(N+j-1)}{2})}. \quad (17)$$

(2) 熱力学的極限　$N \to \infty$

ハミルトニアン h からハミルトニアンの最小値 h_{min} を引いて計算すると $N \to \infty$ の自由エネルギーが評価できる。　実は h_{min} を満たす配置 $\{x_i\}$ は Jacobi 多項式 $P_N^{(2a-1,2b-1)}(x)$ の零点 $\{x_i^0\}$ になる[4]。

(3) 自由エネルギー

粒子当たりの自由エネルギーは、結局

$$
\begin{aligned}
F &= -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\beta N}\log\{\int e^{-\beta(h-h_{min})}dx_1\cdots dx_N\} \\
&= -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\beta N}\log\{\frac{N!I_0}{\prod_{i=1}^N(1-x_i^0)^{a\beta}(1+x_i^0)^{b\beta}\ \prod_{i<j}^N\mid x_i^0-x_j^0\mid^\beta}\} \\
&= -\frac{1}{\beta}\log(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}(1-\log(\frac{\beta}{2}))+\frac{1}{\beta}\log\Gamma(\frac{\beta}{2}+1) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

になる。

同様にして古典直交多項式に関連したすべてのアンサンブルについて粒子当たりの自由エネルギーは

$$
F=\frac{1}{2}(1-\log(\frac{\beta}{2}))+\frac{1}{\beta}\log\Gamma(\frac{\beta}{2}+1)-\frac{1}{\beta}c \qquad (19)
$$

の形をとることがわかる[6]。c は β に依存しない定数である。

4. 相関関数の評価

行列のアンサンブルに対応している $\beta=1,2,4$ においては一般的な相関関数の評価法として Dyson の四元数行列法が知られる[7]。　これは $\beta=2$ ではそれぞれのアンサンブルに関連した直交多項式、$\beta=1,4$ では歪直交多項式を用いて相関関数を表すものである。古典直交多項式に関連したアンサンブルに対してはこれらの多項式の表式が書き下せそこから相関関数が評価できる[8]。

参考文献

1) P. L. Hsu: Ann. Eugenics **9** (1939) 250.
2) E. P. Wigner: Proc. Cambridge Philos. Soc. **47** (1951) 790.
3) M. L. Mehta: *Random Matrices* (2nd edition, Academic Press, 1990).
4) G. Szegö: *Orthogonal Polynomials* (American Mathematical Society, 1959).

5) A. Selberg: Norsk Matematisk Tidsskrift **26** (1944) 71.
6) T. Nagao and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) (in press).
7) F. J. Dyson: Comm. Math. Phys. **19** (1970) 235.
8) T. Nagao and M. Wadati: preprint, 1991.