地震現象の数理モデル

慶大理工　　中西秀

統計物理学の立場から地震現象を眺めたとき、まず目を引くのは、数多くの巾乗則が成り立っていることであろう。地震のマグニチュードとその頻度の間の Gutenberg-Richter 則、[1] 大地震後の余震頻度の減衰に対する大森則、[2] 震源分布の相関関数に対する巾乗則[3]などが代表的なものであろう。なかでも Gutenberg-Richter 則は有名で、それを説明するためにいくつかのモデルが調べられてきた。ここでは特に、最近 Carlson と Langer ら[4]によって詳しく調べられたスティック・スリップ・モデルについて、その問題点を議論したい。

スティック・スリップ・モデルはもともと Burridge と Knopoff[5]によって導入されたもので、種々の変形があるが、そのなかでも最も単純なものが Carlson と Langer らによって数値的に詳しく調べられた。[4] それは、床との間に摩擦を受けながら運動している1次元ブロック・スプリング系で、系は別のスプリング (kp) を通して天井から一様に引っ張られている(図1)。これは、2つのプレートの間の運動を模式的にしたものだ。系は、ニュートン方程式

$$m\ddot{U}_i = -k_pU_i + k_c(U_{i+1}+U_{i-1}-2U_i) - F(\dot{U}_i+v_p) \tag{1}$$

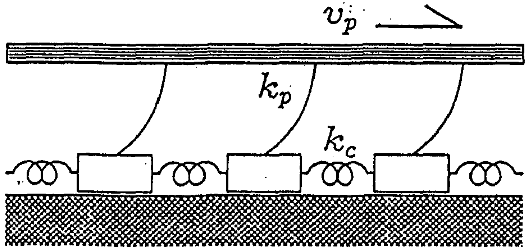

図1.

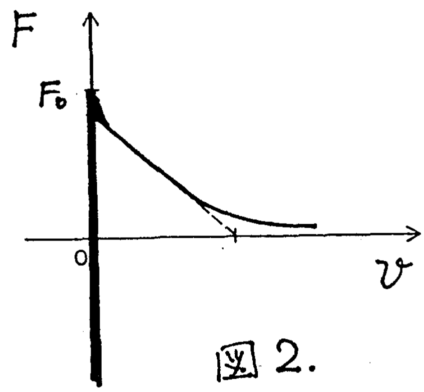

図2.

に従っているとするが、摩擦力 $F(v)$ が図2のように、静止摩擦と速度の減少関数の動摩擦の部分から成り、これによって系は複雑なスティック・スリップ運動をする。Carlson と Langer は、このような完全に決定論的で運動方程式に何のランダムネスもないような系でも、ほとんどの初期条件に対して系は乱雑な運動をし、

$$\mu \equiv \ln(\sum_i \delta u_i) \tag{2}$$

で定義される地震のマグニチュードに対し分布関数の Gutenberg-Richter 則が自然に出てくることを数値的に示した。

(1) 式は、最後の摩擦力の項を除けば弾性体の離散モデルとして見なれたものであるが、我々は、(1) 式の連続極限を取ったときの問題点を考えたい。

まず、(1) 式を無次元化した式を導く。時間 t の単位を $\tau \equiv \sqrt{m/k_p}$、変位 U_iの単位を $D_0 \equiv F_0/k_p$と取って時間と変位を無次元化すると (1) 式は

$$\ddot{u}_i = -u_i + l^2(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i) - \phi(\dot{u}_i+\nu) \qquad l^2 \equiv k_c/k_p \tag{3}$$

のようになる。但し、ϕは無次元化された摩擦関数で、最大静止摩擦は1に規格化されている。格子定数を a として、単純に $la \equiv \xi$が一定となるように $a \to 0$ の極限を取ると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u + \xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\nu\right) \tag{4}$$

と (3) 式の連続極限の式が書ける。

さて、(4) 式のスケール則を見てみる。(4) 式は明らかに

$$\begin{aligned} \xi &\Leftrightarrow \xi' = h\xi \\ x &\Leftrightarrow x' = hx \end{aligned} \qquad (5)$$

の変換に対して不変であるから、その解 $u_\xi(x,t)$ に対しても

$$u_\xi(x,t) \Leftrightarrow u_{\xi'}(x',t) = u_\xi(x'/h,t) \qquad (6)$$

の関係が成り立つ。すると、ほとんど任意の初期条件に対し解が統計的に同じ振舞いをすると仮定すると、単位長さ単位変位当りのマグニチュードに対する地震の頻度分布 $D_\xi(\mu)$ は

$$D_\xi(\mu) = \frac{1}{M} f(M/\xi) \text{ 但し } M = e^\mu \qquad (7)$$

とスケールされなければならない。ここで、f はξによらない無次元関数。Carlson と Langer による離散系の数値計算によると x の小さいところで $f(x) \sim x^\alpha$ となりαはϕの形にあまりよらず、0.1 程度の小さな値を取る。

しかしながら、(3) → (4) の連続極限には以下のような問題点がある。

- まず a を小さくしていって数値計算すると、u_iの形はどんどん滑らか、即ち、u, $\partial u/\partial x$ は連続関数に収束してゆくが、$\partial^2 u/\partial x^2 \mid_i \equiv (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)/a^2$は絶対値が 1 の程度で乱雑な関数となって収束しない。(図３)
- 上の事実と関連するが、$a \to 0$ の極限でも 1 ブロックイベントが生じ、時間発展に対しても解の微細構造がいくらでも出てくる。
- さらに、Carlson らの最近の計算によると、[6] $D(\mu)$ のμの大きな方のカットオフ、即ち、最大のマグニチュードμ^*は a に依存し

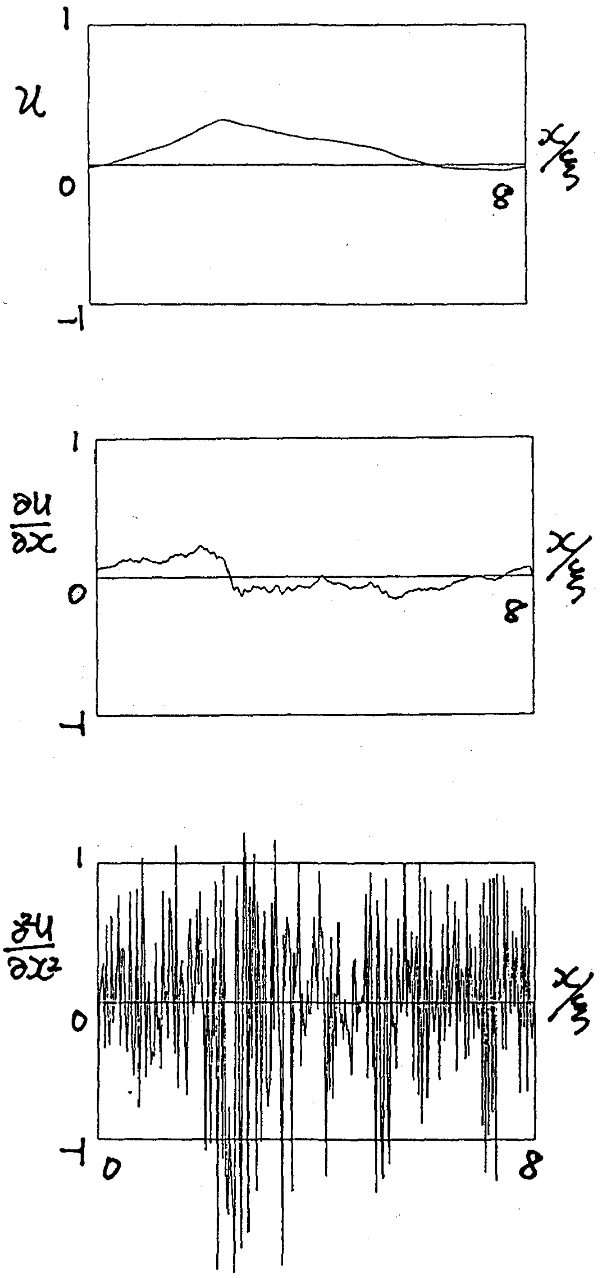

図 3.

$$\mu^* \sim \ln 1/a \qquad (8)$$

で大きくなる。一方、$D(\mu)$ は総和則

$$\int_0^\infty D(\mu) e^\mu d\mu = 1 \qquad (9)$$

を満たさなければならないので、もし (8) 式が本当だと $D(\mu)$ の $a \to 0$ 極限が自然に定義されない。

このように、(3) 式で定義されるスティック・スリップ・モデルの連続極限には色々不明な

点がある。最小の長さの単位 a はこのモデルに現れる Gutenberg-Richter 則にどのような役割を果たしているか、$a \to 0$ の極限が定義されるとするとどのような意味でなのか等、スティック・スリップ・モデルを数理モデルとして見たときには明らかにすべき興味ある問題点がある。

参考文献

1. B. Gutenberg and C.F. Richter, Ann. di Geofis. **9**, 1(1956).
2. F. Omori, J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo **7**, 111(1894). T. Utsu, Geophys. Mah. **30**, 521 (1961).
3. Y. Y. Kagan and L. Knopoff, Geophys. J. R. Astron. Soc. **62**, 303 (1980).
4. J. M. Carlson and J. S. Langer, Phys. Rev. Lett. **62**, 2632 (1989); Phys. Rev. A **40**, 6470 (1989).
5. R. Burridge and L. Knopoff, Bull. Seismol. Soc. Am. **57**, 341 (1967).
6. J. M. Carlson, J. S. Langer, B. E. Shaw, and C. Tang, preprint(1990).