

The Dynamics of Wave Fronts in Excitable Media

名大理 山田裕康, 野崎一洋

物理, 化学あるいは生物系において, 反応活性の波が伝播する現象は, 様々な形で観察されている. このような波の前後で, 系の状態, 構造が急激な変化を示す場合があり, その境界は界面, 遷移層などと呼ばれる. 本報告では, この遷移層が二次元空間において形成する曲線パターンのダイナミクスを論じ, さらに, 螺旋波の形成について考える.

活性化因子 u および抑制因子 v の二成分からなる反応拡散系をモデルにとり, 励起状態からの v による回復が起こっていない領域 (non-recovering region, $v = v_S$:const.) の遷移層 (wave front) の伝播を調べる. すなわち, v_S をパラメータとする一成分反応拡散系

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u; v_S), \quad f(u; v_S) = f(u, v = v_S) \quad (1)$$

を扱う. ここで Δ はラプラシアン, $f(u, v) = 0$ は (u, v) -空間で N 字型の曲線を表わす. 方程式 (1) の一次元的な解 $u = u(x - ct)$ すなわち遷移層が直線状に配置した解を仮定し, この解から二次元の媒質を伝播する遷移層を構成する.¹⁾⁻³⁾ 遷移層の描く曲線の曲率が小さい (曲率半径が遷移層の幅より大きい) として漸近的な摂動法を用いる. この際得られる可解条件と, 曲線が連続であるという幾何学的な条件より, 遷移層曲線パターンのダイナミクスが次の方程式に支配されていることを導いた.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{r\eta} &= (\bar{\alpha}\bar{\alpha}_\eta + \bar{\alpha}_{\eta\eta})_\eta, \quad \bar{\alpha}_\eta = c\bar{\kappa}, \\ \alpha(s, t) &= \varepsilon^{1/2}\bar{\alpha}(\eta, \tau), \quad \kappa(s, t) = \varepsilon\bar{\kappa}(\eta, \tau), \\ \eta &= \varepsilon^{1/2}s, \quad \tau = \varepsilon t, \end{aligned} \quad (2)$$

ここに $\alpha(s, t), \kappa(s, t)$ は曲線上の点 s における接線速度および曲率, s は曲線の弧長, ε は摂動パラメータ. 方程式 (2) は Burgers 方程式を空間微分したものに対応しており, 時間の任意関数を含む変数変換を使って Burgers 方程式に帰着できる.

Burgers 方程式 (2) の厳密解が求まれば, 系 (1) の漸近的なあるいは主要な振舞いを調べることができる. そこで, 微分方程式系に対する群対称性の理論を応用し, Burgers 方程式のいくつかの特解を解析的な形で得た.⁴⁾ これらの特解は遷移層が成す曲線パターンの分類を与え, 時間とともに広がる円環, 回転する螺旋などを含んでいる.⁵⁾

さらに螺旋波の形成 (螺旋解の安定性) を考えてみる. 方程式 (2) は Cole-Hopf 変換 $\tilde{\alpha} = 2w_\eta/w$ によって,

$$w_\tau = w_{\eta\eta} + (A(\tau) - B(\tau)\eta)w \quad (3)$$

となる. ここで $A(\tau), B(\tau)$ は任意函数. $A = 0, B = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} w(\eta, 0) &= w(\eta) \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow 0), \\ w_\eta(0, \tau) &= 0, \quad w(\eta, \tau) \text{ は } \eta, \tau \in [0, +\infty) \text{ で有界,} \end{aligned} \quad (4)$$

という初期値-境界値の条件のもとで方程式 (3) を解くと,

$$\begin{aligned} w(\eta, \tau) &= \sum_{Ai'(\lambda_j) = 0} a(\lambda_j) Ai(\eta + \lambda_j) \exp(\lambda_j \tau) \quad (5) \\ (\tau \rightarrow +\infty) &\sim Ai(\eta + \lambda) \exp(\lambda \tau), \quad \lambda = \max_j \lambda_j. \end{aligned}$$

ここに $Ai(\eta)$ は (有界な) Airy 函数であり, (5) は $\tau \rightarrow +\infty$ で螺旋波に漸近する解になっている. ゆえに, 初期値-境界値問題は, 螺旋解に漸近する初期条件の領域が存在することを示唆している.

参考文献

- 1) J. J. Tyson and J. P. Keener, *Physica D* **32** (1988), 327.
- 2) J. J. Tyson and J. P. Keener, *Physica* **21D** (1986), 307.
- 3) J. P. Keener, *SIAM J. Appl. Math.* **46** (1986), 1039.
- 4) P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer-Verlag, 1986), p. 212.
- 5) H. Yamada and K. Nozaki, talk at the 46th Annual Meeting of the Physical Society of Japan, Tokyo, March 1991.