新離散型 KdV 方程式

若竹塾　　成田　和明

（1991年10月8日受理）

（要旨）

新離散型 KdV 方程式

$$\dot{u}_i = 4(u_{i-1}-u_{i+1})(1-u_i)^2/[(1-2u_{i-1}-2u_i+2u_{i-1}u_i)^{1/2} + (1-2u_i-2u_{i+1}+2u_iu_{i+1})^{1/2}]^2$$

の N-ソリトン解，及びゼロでない境界条件の下の1-ソリトン解を求める。

§1.　定義と変換関係

新離散型 KdV 方程式を次式で定義する。

$$\dot{u}_i = 4(u_{i-1}-u_{i+1})(1-u_i)^2/[(1-2u_{i-1}-2u_i+2u_{i-1}u_i)^{1/2} + (1-2u_i-2u_{i+1}+2u_iu_{i+1})^{1/2}]^2 \tag{1}$$

以下でこの方程式のもつ変換関係をしらべる。このため，新変数 v_i を次式で定義する。

$$v_i = 1-(1-2u_{i-1/2}-2u_{i+1/2}+2u_{i-1/2}u_{i+1/2})^{1/2} \tag{2}$$

すなわち，

$$2-2v_i+v_i^2 = 2(1-u_{i-1/2})(1-u_{i+1/2}) \tag{3}$$

この時，v_i は次式をみたす。

$$\dot{v}_i = 2(v_{i-1}-v_{i+1})(2-2v_i+v_i{}^2)/(2-v_{i-1}-v_i)(2-v_i-v_{i+1}) \tag{4}$$

新変数 n_i を

$$1+n_i = 2(1-u_i)/(2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}) \tag{5}$$

によって定義すると，n_i は離散型 KdV 方程式[1)]

$$\dot{n}_i = (n_{i-1} - n_{i+1})(1+n_i)^2 \tag{6}$$

をみたすことが示せる。証明は附録に回す。この n_i を用いて(1)式を次のように書直すことができる。

$$\dot{u}_i = (u_{i-1} - u_{i+1})(1+n_i)^2 \tag{7}$$

(7)式が成立つことは，(1)式を新離散型 KdV 方程式と呼ぶ理由の一つである。次式で定義される w_i

$$v_i = 2(w_{i-1/2} - w_{i+1/2}) \tag{8}$$

を用いて(4)式を書直すと，次のようになる。

$$\dot{w}_i = (w_{i-1} - w_{i+1} + 2w_{i-1}w_i + 2w_iw_{i+1} - 2w_{i-1}w_{i+1} - 2w_i^2)/(1 - w_{i-1} - w_{i+1}) \tag{9}$$

この式は Quispel-Nijhoff-Capel-van der Linden 方程式[2)]の特別な場合に当る。(8)式を(5)に代入すると，

$$u_i = 1 - (1 + w_{i-1} - w_{i+1})(1+n_i) \tag{10}$$

となる。このようにして新離散型 KdV 方程式の N-ソリトン解は(6), (9)式の示す既知の N-ソリトン解を使って表現できることがわかった。

§2.　N-ソリトン解

方程式(9)の持つ N-ソリトン解は，文献 2 の中にある積分方程式を適当なスペクトル測度を仮定して解くことにより次式のように求められる。

$$w_i = A(i)/\det(I + B(i)) \tag{11}$$

ここで I は単位行列で，行列 $A(i)$ と $B(i)$ は次のように与えられる。

$$A(i) = 2\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\overline{(I+B(i))}_{nm} \times \frac{\mathrm{ch}\,\kappa_m \mathrm{sh}\,\kappa_n}{(\mathrm{ch}\,\kappa_m + i\mathrm{sh}\,\kappa_m)(\mathrm{ch}\,\kappa_n - i\mathrm{sh}\,\kappa_n)} \cdot e^{2x_n} \tag{12}$$

$$(B(i))_{mn} = \frac{2\mathrm{sh}\,\kappa_m \mathrm{ch}\,\kappa_n}{\mathrm{sh}(\kappa_m + \kappa_n)} \cdot e^{2x_m} \tag{13}$$

$$x_n = \kappa_n \cdot i + \omega_n \cdot t + \delta_n \tag{14}$$

$$\omega_n = -\mathrm{sh}2\kappa_n \tag{15}$$

(12)式の中で，上についたバーにより余因子行列を表わす。更に方程式(6)の持つ N-ソリ

トン解は，同じ$B(i)$を用いて文献1の中に次のように与えられている。

$$1+n_i=\frac{\det(I+B(i-1))\det(I+B(i+1))}{[\det(I+B(i))]^2} \tag{16}$$

(11)式と(16)式を(10)式に代入すると，方程式(1)のN-ソリトン解の表式が次のように求まることになる。

$$\begin{aligned}u_i=&\{A(i+1)\det(I+B(i-1))-A(i-1)\det(I+B(i+1))\\&-\det(I+B(i-1))\det(I+B(i+1))+[\det(I+B(i))]^2\}\ /\ [\det(I+B(i))]^2\end{aligned} \tag{17}$$

(17)式で$N=1$とおくと，1-ソリトン解が次のように求まる。

$$u_i=\mathrm{sh}^2\kappa_1\cdot\mathrm{sch}2\kappa_1\cdot\mathrm{sch}^2(\kappa_1\cdot i+\omega_1\cdot t+\delta_1) \tag{18}$$

$$\omega_1=-\mathrm{sh}2\kappa_1 \tag{19}$$

§3. ゼロでない境界条件の下の1-ソリトン解

方程式(1)の解として

$$u_i=u_\infty+A\,\mathrm{sch}^2(\kappa\cdot i+\omega\cdot t+\delta) \tag{20}$$

を仮定して，Aを未定定数法によって定めると，次のようなゼロでない境界条件の下の1-ソリトン解が求まる。

$$u_i=u_\infty+\frac{(1-u_\infty)(1-4u_\infty+2u_\infty{}^2)\mathrm{sh}^2\kappa}{1+2(1-u_\infty)^2\mathrm{sh}^2\kappa}\times\mathrm{sch}^2(\kappa\cdot i+\omega\cdot t+\delta) \tag{21}$$

$$\omega=-\frac{(1-u_\infty)^2}{1-4u_\infty+2u_\infty{}^2}\cdot\mathrm{sh}2\kappa \tag{22}$$

[附録]

$$\frac{\dot{n}_i}{1+n_i}=-\frac{\dot{u}_i}{1-u_i}+\frac{\dot{v}_{i-1/2}+\dot{v}_{i+1/2}}{2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}} \tag{A-1}$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{2(v_{i-1/2}-v_{i+1/2})}{2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}}+\frac{2}{2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}}\\&\quad\times\Big[(2-2v_{i-1/2}+v_{i-1/2}{}^2)\Big(\frac{1}{2-v_{i-3/2}-v_{i-1/2}}-\frac{1}{2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}}\Big)\\&\quad+(2-2v_{i+1/2}+v^2_{i+1/2})\Big(\frac{1}{2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}}-\frac{1}{2-v_{i+1/2}-v_{i+3/2}}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{A-2}$$

$$= \frac{2}{2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}} \left[\frac{2-2v_{i-1/2}+v_{i-1/2}^2}{2-v_{i-3/2}-v_{i-1/2}} - \frac{2-2v_{i+1/2}+v_{i+1/2}^2}{2-v_{i+1/2}-v_{i+3/2}}\right] \quad \text{(A-3)}$$

$$= \frac{2(1-u_i)}{2-v_{i-1/2}-v_{i+1/2}} \left[\frac{2(1-u_{i-1})}{2-v_{i-3/2}-v_{i-1/2}} - \frac{2(1-u_{i+1})}{2-v_{i+1/2}-v_{i+3/2}}\right] \quad \text{(A-4)}$$

$$= (1+n_i)\ [(1+n_{i-1})-(1+n_{i+1})] \quad \text{(A-5)}$$

$$= (n_{i-1}-n_{i+1})(1+n_i) \quad \text{(A-6)}$$

参考文献

1) S. Fujii, F. Kako and N. Mugibayashi : J. Phys. Soc. Jpn. **42** (1977) 335.

2) G. R. Quispel, F. W. Nijhoff, H. W. Capel and J. van der Linden : Physica **125A** (1984) 344.