ウエーブレットについて

京大防災研 山田道夫、京大数理研 大木谷耕司

1. はじめに

時系列データから、特徴的な変動周期を取り出す方法としてフーリエ解析は最も重要な手法の一つである。時系列 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は、$f(t)$ に含まれる調和振動 $\exp(i\omega t)$ の大きさを表しており、時系列に含まれるさまざまな周期変動の強さの指標として、$F(\omega)$ の絶対値の2乗であるフーリエスペクトル $E(\omega)$ が広く用いられている。

このようなフーリエ解析の利点は、まず第一に、変動を調和振動の和として表現することである。一般に、非線形系においても変動の大きさが十分小さな範囲に留まるなら、系は線形系で近似され、その任意の解は基本解である調和振動の一次結合で表現される。この事実は、さまざまなかたちの周期変動のうちでも調和振動に特別な地位を与え、フーリエ分解が変動の分解として考えられる根拠の一つとなっている。通常、「純粋な」周期変動として調和振動をとるのは、それが線形系における基本解であるからである。

一方、非線形性の強い現象ではこのような基本解はもはや適切なものではなく特別な意味を失うことになる。しかし、このような強非線形系においても、フーリエ解析はなお有用である。例えば、十分に発達した一様等方性乱流ではそのフーリエスペクトルに特徴的な $-5/3$ の巾法則(コルモゴロフ則)が見られる事がしられている。フーリエスペクトルにこのような巾則が見い出される系このことが強非線形系のフーリエ解析に積極的な意義を与えている。このような巾則の出現は、一般に、次の二つの理由によっている。まず第一に、巾則の存在が示唆するように、系に特徴的なスケールが存在せず、生起する構造が自己相似的である事である。また第二に、フーリエ分解の積分核である調和振動(異なる振動数のもの同士)互いに相似な関数系をなしていることである。即ち、巾法則の存在は、系の運動(時系列)に内在する自己相似性と、解析に用いる関数系が持つ相似性の両方を成因としている。即ち、強非線形系のフーリエ解析においては、調和振動が線形系の基本解である事は、積極的な利点とはなっていない。

フーリエ解析の広い有用性は、このように調和振動が周期性と相似性の性質を同時に兼ね備えている事による。しかし、これら両者の性質を持つ事で、逆に不便な点も生じている。その最も大きなものは、フーリエスペクトルでは現象の生起した時刻(場所)に関する情報が全く欠落してしまう事である。つまり、時刻の情報はフーリエ変換(あるいはフーリエ係数)の位相部分にだけ反映し、その振幅、従ってスペクトルには全く含まれない。このため、例えば、一つの時系列のなかに異なる種類の現象が混在している場合、フーリエスペクトルからその事実

を知ることは困難であり、それぞれの構造を解析することはさらに難しい。即ち、フーリエ変換は変動の局所性を考慮した解析には適していないのである。

このような点を改善するため、従来から多くの実用的方法が開発されてきた。データの時系列中の局所的な調和振動の周期を調べたい時には、例えば、あらかじめデータにウインドウをかけ注目する振動だけを残してからフーリエ変換を用いることが行なわれる。この方法は、振動周期がウインドウ幅よりはるかに小さい時にはよい結果を与えるが、同程度の大きさの時には、ウインドウの形への依存性やウインドウ幅と周波数分解能の間の不確定性関係などの問題を生ずることがしられている。一方、データの時系列において局所的に注目したいものが、振動周期ではなく、スペクトルの巾則などの自己相似的な構造である場合には、上に述べたように、必ずしも調和振動を用いる必要はないことに注意しよう。フーリエ変換の欠点は、フーリエ変換の積分核 $\exp(i\omega t)$ が空間的には一様な大きさ (絶対値は常に 1) を持つ関数であることに起因している。そこで積分変換の積分核、即ち展開の基底関数系を、時間軸上で局在化した、しかも互いに相似的な関数に選ぶことによって、局所事象の相似構造の解析に適した方法を作ることが考えられる。この着想に基く解析法は 1980 年代はじめに石油探査に関連して試みられ、後に 80 年代後半に数学者によって基礎付けられた。現在この方法はウエイブレット変換法とよばれている。ここではこのウエイブレット解析の方法の概略を紹介する。

2. 連続ウエイブレット変換

現在ウエイブレット解析には、連続レイブレット変換と離散ウエイブレット変換 (ウエイブレット展開) の 2 種類があり、これらは、数学的な枠組や性質の点で大きく異なっている。ここでは、歴史的順序にしたがって積分変換である連続ウエイブレット変換[1-5]から述べることにする。

フーリエ変換は、$\exp(i\omega t)$ による直交展開である。この基底関数は、ω の値のことなるものどうしで、についてスケール変換すれば互いに重なり合う。このことに注意して、時間的に局在化した関数 $\psi(t)$ を用いた積分変換を構成してみよう。まず、フーリエ変換のときと同様、展開基底はスケール変換することで作るが、$\psi(t)$ が局在しているので時間に関して平行移動することも必要である。即ち、変換に用いる基底は、

$$\psi^{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(\frac{t-b}{a})$$

となる。ここで、$a(\neq 0)$ はスケール変換のパラメーターであり、b は平行移動すなわち時刻の

パラメーターである。

この基底を用いてデータ $f(t)$ の積分変換を次のように定義する。

$$T(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{(a,b)*}(t)f(t)dt$$

フーリエ変換がスケールのパラメーター (ω) のみを持っているのに対し、この左辺の関数は、スケールと時刻の両方のパラメーターを持っている。ここで逆変換の存在を保証するために $\psi(t)$ の選び方を若干制限し2乗可積分な関数 $(\psi(t) \in L^2(\mathrm{R}))$ 遠くで十分速く減衰 (指数的減衰なら十分) し、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt=0$$

となるものであれば良い。この条件を満たすとき、上の基底は wavelet, また $\psi(t)$ は、analyzing wavelet、とよばれている。$\psi(t)$ としてよく用いられるものは

$$\psi(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\exp(-t^2/2)$$

や、区分的に定数である、

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ \dfrac{1}{2} & (1<|x|<3)\\ 0 & (|x|>3)\end{cases}$$

などで、これらは、Mexican hat (前者) や French hat(後者) などと呼ばれている。

さて、このような analyzing wavelet を用いるとき、上の積分変換は (連続) ウエイブレット変換と呼ばれ、$f(t)\in L^2(\mathrm{R})$ に対して、逆変換は次のように与えられる。

$$f(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T(a,b)\psi^{(a,b)}(t)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}$$

これから直ちに次の等式 (等長性) が導かれる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|T(a,b)|^2\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}$$

この式は、もとのエネルギーを各成分のエネルギーのエネルギーの和に表現している。そのため、一見フーリエ変換の Parseval の等式、つまりピタゴラスの定理ににているが実はそう

簡単ではない。フーリエ変換の場合、基底関数系は直交系である。しかし、ウエイブレット変換の基底関数系は完全系ではあるが直交系ではないのである。このような特殊な基底系の特徴は、基底関数が一次独立ではないこと、従って完全系をその真部分集合として持っていること(over-completeness)である。その結果、展開係数同士が互いに一次従属になる。ウエイブレット変換の場合には、$T(a,b)$ が互いに一次従属となり $T(a,b)$ として a,b の任意関数を選ぶことはできない。このことは、$T(a,b)$ のエネルギー的な解釈に困難をもたらし、$T(a,b)$ に「ある時刻 (b) におけるスケール (a) の成分」の意味を与え、その特徴を物理的に解釈するときには、それがデータ本来の特徴を反映したものか、それとも上の形式的な関係式に起因するものかを慎重に区別する必要がある。

3. 離散ウエイブレット変換(直交ウエイブレット展開)

これまで述べてきたように連続ウエイブレット変換では基底関数が直交していないため、結果のエネルギー的な解釈に注意が必要であった。このような用途にはウエイブレットを直交化して通常の完全正規直交系を作ることが望ましい。直交ウエイブレットは主にフランスの数学者たちによって80年代半ばに構成された。[6-11] 直交化されたウエイブレットでは、a や b のパラメーターは連続的ではなく離散的になる。そのため、直交化されたウエイブレットによるウエイブレット変換は、離散ウエイブレット変換、あるいは、ウエイブレット展開と呼ばれる。

連続ウエイブレット変換の場合と同様、直交ウエイブレットは analyzing wavelet の離散的な平行移動とスケール変換によって定義される。スケール変換は普通2のべきにとることが多い。

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

ここで、j と k は整数である。このとき analyzing wavelet をうまく選ぶと、これらのウエイブレットが $L^2(\mathbf{R})$ の完全正規直交系となり次の展開が成り立つ。

$$f(t) = \sum_{j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{j,k}\psi_{j,k}(t)$$

$$\alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t)^* f(t)\mathrm{d}t$$

しかし、このような完全直交系を作る analyzing wavelet を構成することはなかなか大変である。以下では、フーリエ解析との対応の点でやや有利と思われる、フーリエ空間(周波数軸上)でコンパクトサポートをもつ Meyer の analyzing wavelet[10-11] を紹介する。

直交ウエイブレット変換は、j と共に解像度が上がっていく $f(t)$ の近似列を与えている。これを一般的に定式化したものは multi-resolution analysis と呼ばれ、現在、完全正規直交ウイブレットを構成する基本手法となっている。ここでは、その数学的詳細には立ち入らず、実際的な構成法のみを述べる。

まず次の3つの条件を満たす C^k 級の実数値関数 $\phi(\omega)$ を選ぶ。

1) $\hat{\phi}(\omega) \geq 0$, $\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(-\omega)$, $\hat{\phi}(\omega)$ は $\omega \geq 0$ で単調減少。

2)$\hat{\phi}(\omega) = 1(|\omega| \leq \frac{2\pi}{3})$, $0(|\omega| \geq \frac{4\pi}{3})$

3)$(\hat{\phi}(\omega))^2 + (\hat{\phi}(\omega - 2\pi))^2 = 1$ $(\frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3})$

この関数の逆フーリエ変換で $\phi(t)$ を定義すると、$\{\phi(t-k)|k \in \mathbf{Z}\}$ は正規直交系となる。このとき、

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp(-\mathrm{i}\omega/2)\sqrt{(\hat{\phi}(\omega/2)^2 - (\hat{\phi}(\omega))^2}$$

とすると、この逆フーリエ変換、

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}\omega t)\hat{\psi}(\omega)\mathrm{d}\omega$$

が求める analyzing wavelet である。$k = \infty$ とした場合、analyzing wavelet はその微分も含め局在化の程度が非常によいことが証明されている。このようなの $\psi(t)$ 一例 ($t = 1/2$ に関して対称) を 図1 に示す。[12-13]

以下では、上に示した Meyer の analyzing wavelet を用いた直交ウエイブレット展開の性質と応用例を述べる。$L^2(\mathbf{R})$ に属する関数 $f(t)$ は、直交ウエイブレット展開によって展開される。実は、このウエイブレットは、もっと広く $L^p(\mathbf{R})$ $(1 < p < \infty)$ や Sobolev 空間においても無条件基底 (展開級数の収束値が和の順序によらない基底) になっている。また、収束の速さに関しては、フーリエ級数と同程度であることが証明されている。

ところで、Meyer のウエイブレットはフーリエ空間でサポートコンパクト ($\phi_{j,k}(\omega)$ のサポートは $2^{j+1}\pi/3 \leq |\omega| \leq 2^{j+3}\pi/3$ の中に含まれる) であった。このことは、ウエイブレット

展開の係数がフーリエ展開の係数と関係を持つことを意味している。すなわち、ウエイブレット展開の係数を用いて、

$$E_j = \sum_k |\alpha_{j,k}|^2$$

を作ると、これは大雑把に言って、$2^{j+1}\pi/3 \le |\omega| \le 2^{j+3}\pi/3$ の範囲のフーリエスペクトル $E(\omega)$ に対応する (以下では、フーリエスペクトルとの対比から、E_j をウエイブレットスペクトルと呼ぶことにする)。

$$E_j \sim \omega E(\omega) \;\; (\omega \sim 2^{j+2}\pi/3)$$

この関係は、例えばフーリエスペクトルが、巾関数の形をしていれば、E_j にもそれが反映 (逆も可) されることを意味している。[12)]

$$E(\omega) \sim \omega^{-p} \Leftrightarrow E_j \sim 2^{-(p-1)j}$$

もちろん、ウエイブレットは時間軸及び周波数軸の双方で広がりを持った関数であるから、展開係数の大きさを見てフーリエ解析のような周波数解析を行なうことには限度がある。これに対して、スペクトルに巾則として現れるデータの相似性は、共に相似関数系による展開であるフーリエ展開とウエイブレット展開両方で検出可能である。上の関係式はこのことの反映にほかならず、直交ウエイブレットの幅広い応用を示唆している。なお、連続ウエイブレット変換のときと同様直交ウエイブレエット展開についても高速のアルゴリズムが開発されている。[5,13−14)]

4. 乱流への応用例[13)]

解析に用いたデータは、 大気乱流を一点で測定して得た速度の時系列であり、(フーリエ)エネルギースペクトルはおよそ2桁の幅を持つ慣性小領域 (-5/3 乗領域) を持っている。図2に示すウエイブレットスペクトルは、これに対応して、-2/3 乗則を示している。対比のために、これと全く同じエネルギースペクトルを持つが、各フーリエ成分の位相を一様乱数で与えた乱数時系列を作り、解析結果を比較した。これら、2つの時系列は、見かけは良くにており肉眼で区別することは困難である。しかし、 orthonormal wavelet で展開し、その係数から各スケールでの時系列を作ると (図3、大きな j が小さなスケールに対応)、乱流では、小さな

スケールにおける間欠性が顕著であることがわかる。また各スケールにおけるwavelet係数の分布関数を作ると、(図4、実線は標準正規分布)乱数時系列では正規分布とよく一致するのに対して、乱流では、小さなスケールj)(大きなj)ほど正規分布から外れ、むしろ指数分布に近くなってきていることがわかる。異なったスケールのエネルギー分布同士の関係を調べるため、全体の時間を短い時間区間に分割し、それぞれの区間でウエイブレットスペクトルを作り、この局所的なウエイブレットスペクトルの時間変化をグラフ化したものが図5(横軸が時間軸、縦軸がスケールに対応)である。乱数時系列のグラフが小さなスケール(手前の方)で平坦になるのに対し、乱流のグラフでは大きなスケールから小さなスケールに向かう「山谷構造」が見られる。この山谷構造は、大きなスケールの運動の中に小さなスケールの運動が励起されていることを示しており、乱流のエネルギーカスケード過程の反映であると考えられる。 このように、連続ウエイブレット変換では困難であった乱流と人工的な乱数の区別[15-17]が、直交ウエイブレット展開の場合は比較的容易である。このことは、乱流中のエネルギーカスケード過程に直交ウエイブレット展開を適用することでその微細構造をとらえることができることを示唆している。[18]

5. おわりに

ウエイブレット解析はフーリエ解析を補間する道具として、局所的な事象のスケール解析に適している。[19] とくに、自己相似的な対象に対しては、その連続性の程度や特異性指数まで議論できる点で有利であり、また直交ウエイブレットではスペクトルの巾則をウエイブレットスペクトルから見い出すことも可能である。このように、フーリエ解析がもともと線形系の解析に非常に適していたのに対し、ウエイブレット解析は強い非線形の効果によって生じる階層構造の解析に適している。ここで述べた応用は乱流解析だけであったが、ウエイブレット解析は、情報圧縮や画像解析などの分野にも応用されつつあり、さまざまな方面で活用が試みられている。ウエイブレット解析は開発されてからまだ10年も経たない新しい方法であり、今後の展開が期待される。

参考文献

1) Grossmann, A. and J. Morlet: Mathematics+ Physics (L.Streit ed.), vol.1, World Scientific, 1985, p.135.

2) Grossmann, A. *et al.*: J. Math. Phys., **26**(1985)2473.

3) Grossmann, A. *et al.*: *Wavelets*(J. M. Comes *et al.* eds.), Springer, 1989,,p.2.

noindent 4) Daubechies, I. *et al.*:J. Math. Phys. **27**(1986)1271.

5) Combes, J. M. *et al.* eds. *Wavelets*, Springer, 1989.

6) Meyer, Y.: preprint.

7) Lemarie, P.-G.: J. Math. Pure et Appl., **67**(1988)227; Battle, G.: Commun. Math. Phys. **100**(1987)601.

8) Mallat, S. :preprint.

9) Daubechies, I.:Comm. Pure Appl. Math., XLI(1988)909.

10) Meyer, Y.: *Wavelets*(J. M. Combes et al. eds.), Springer, 1989, p.21.

11) Morimoto, A.:Master Thesis Kyoto Univ. (1988).

12) Yamada, M. and Ohkitani, K.: Prog. Theor. Phys., **83**(1990) 819.

13) Yamada, M. and Ohkitani, K.: *to appear in* Fluid Dyn. Res., 8(1991).

14)Perrier, V. and Basdevant, C.:Rech. Aerosp, **3**(1989)53.

15) Argoul, F. *et al.*: Nature, **338**(1989)51.

16) Everson, R.M. and Sirovich, L.: Report of Center of Fluid Mech., Turbulence and Computation, Brown University, ♯89-182.

17) Everson, R., Sirovich, L. and Sreenivasan, K. R. : Phys. Lett. A **145**(1990)314.

18) Meneveau, C., Phys. Rev. Lett.**66**(1991)1450.

19) 山口昌哉, 山田道夫、 科学、岩波書店、1990年5月、p.398.

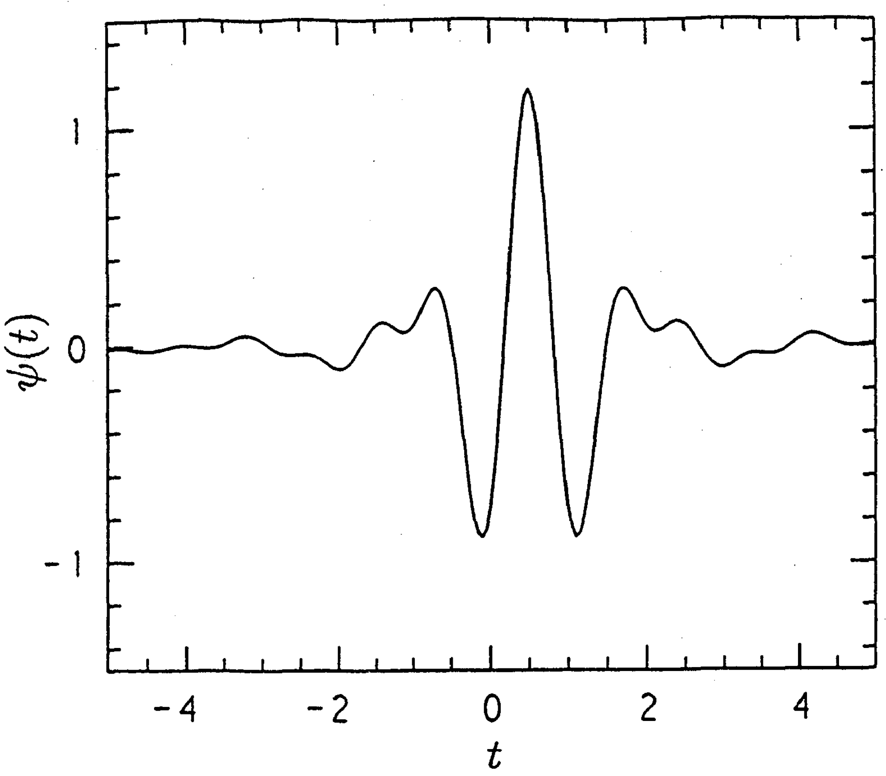


図1

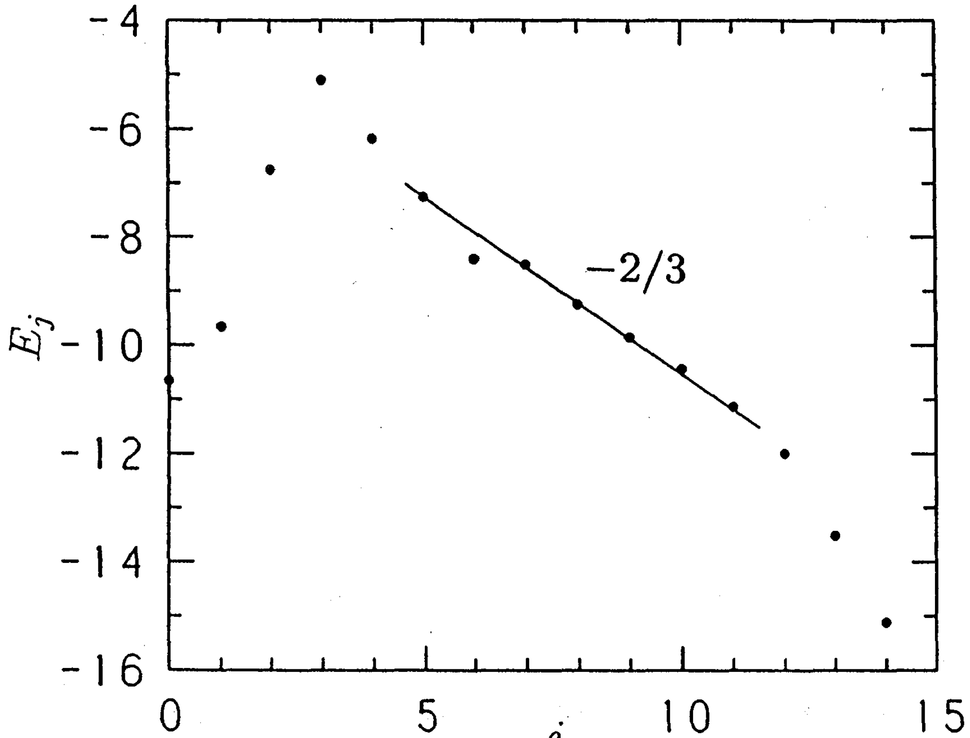
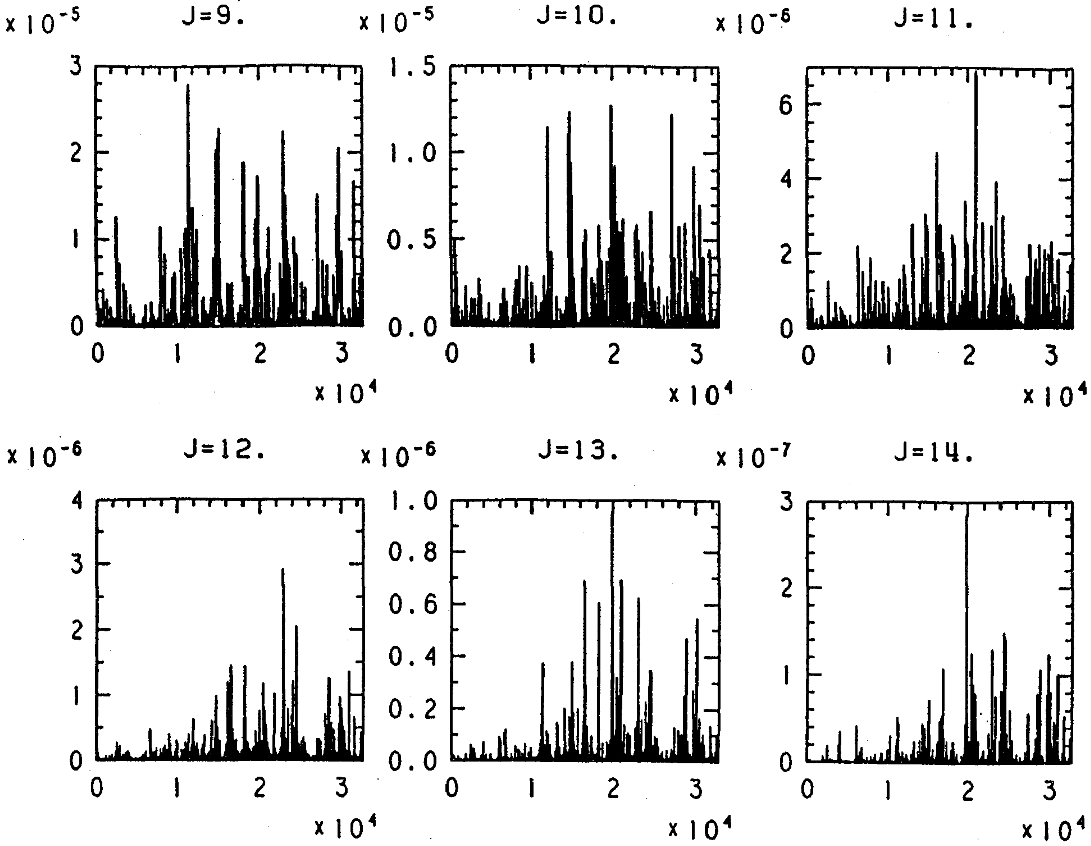


図2

乱流


x 10-5
J=9.
x 10-5
J=10.
x 10-6
J=11.
x 10-6
J=12.
x 10-6
J=13.
x 10-7
J=14.
x 104

乱数

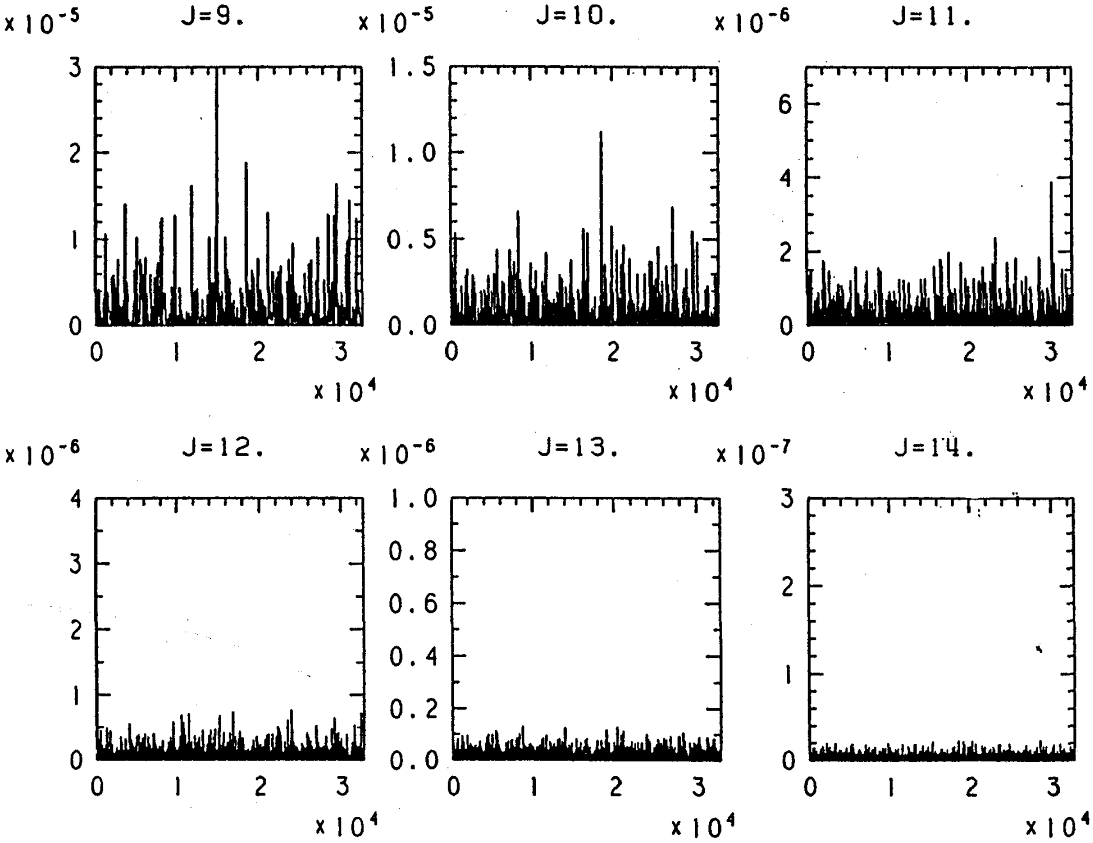
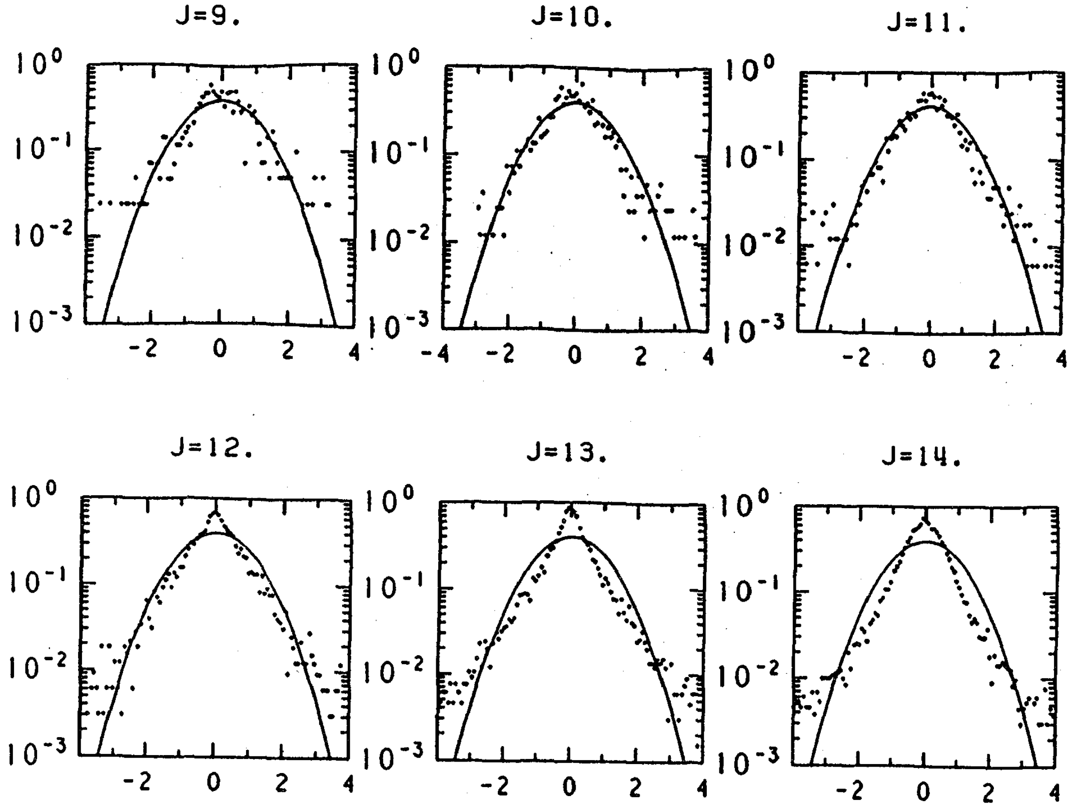

x 10-5
J=9.
x 10-5
J=10.
x 10-6
J=11.
x 10-6
J=12.
x 10-6
J=13.
x 10-7
J=14.
x 104

図3

乱流


J=9.
J=10.
J=11.
J=12.
J=13.
J=14.
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
-4
-2
0
2
4

乱数

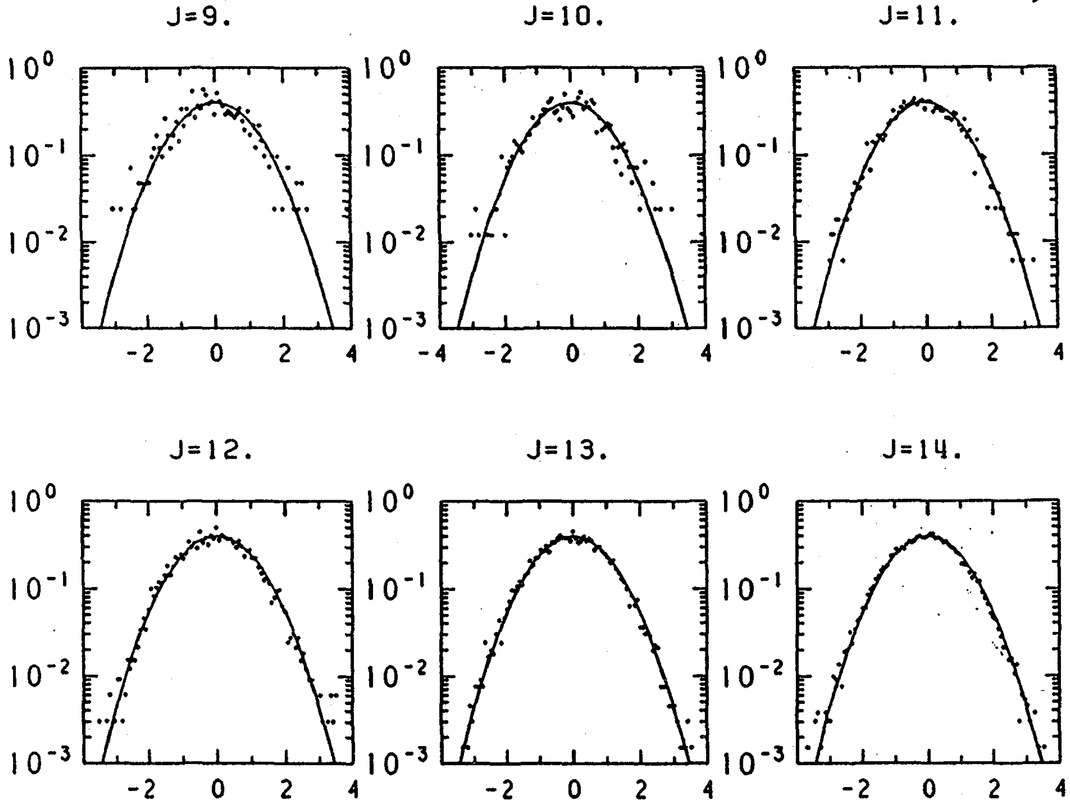
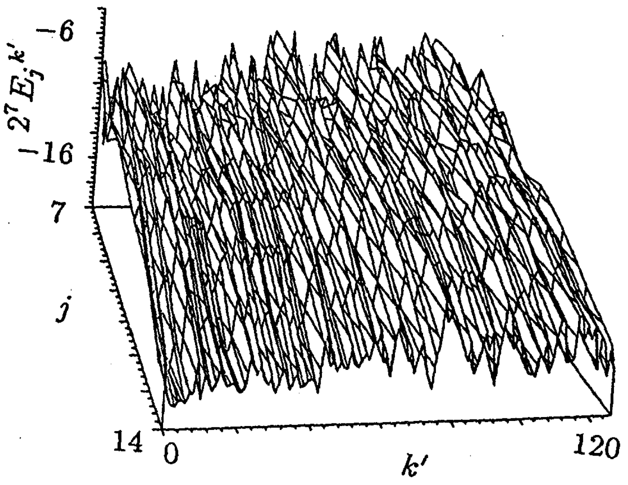

J=9.
J=10.
J=11.
J=12.
J=13.
J=14.
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
-4
-2
0
2
4

図4

乱流



乱数

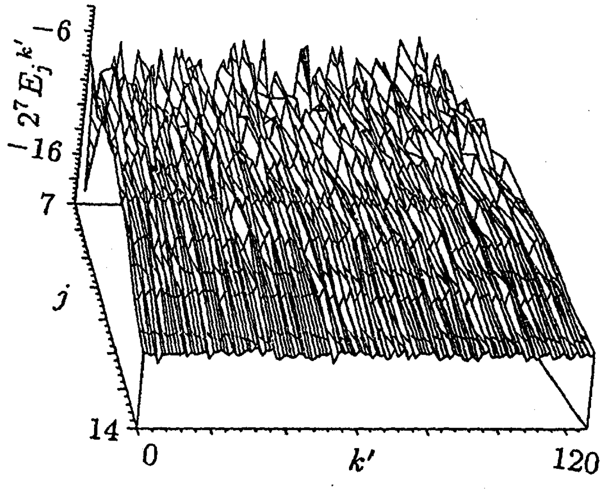


図5