物性研究 57－5（1992－2）

可積分非局所格子方程式

若竹塾　　成田、和明

（1991年11月8日受理）

［要旨］　非局所格子方程式として

$$\dot{\phi}_i+\dot{\phi}_{i+1}=\mathrm{sh}(\phi_i-\phi_{i+1})[1-\mathrm{e}^{-2(\phi_i+\phi_{i+1})}]^{1/2}$$

を提案する。2-ソリトン解を証明し，N-ソリトン解を推測する。

［本文］　この論文で扱うのは，次式で与えられる非局所格子方程式

$$\dot{\phi}_i+\dot{\phi}_{i+1}=f(\phi_i,\ \phi_{i+1}) \tag{1}$$

の１例であるところの，次の方程式

$$\dot{\phi}_i+\dot{\phi}_{i+1}=\mathrm{sh}(\phi_i-\phi_{i+1})[1-\mathrm{e}^{-2(\phi_i+\phi_{i+1})}]^{1/2} \tag{2}$$

である。(2)式は変換

$$u_i=1-\mathrm{e}^{2\phi_i}/\sqrt{2} \tag{3}$$

或いは

$$\phi_i=(1/2)\log\{\sqrt{2}(1-u_i)\} \tag{4}$$

により，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-2u_i-2u_{i+1}+2u_iu_{i+1})^{1/2}=(1/\sqrt{2})(u_{i+1}-u_i) \tag{5}$$

に変形される。前稿[1)]を参考にして，(5)式の conjectural N-ソリトン解を次式のように与えてみる。

$$\begin{aligned}u_i=\{&|I+B(i)|^2-|I+B(i-1)|\ |I+B(i+1)|\\&+A(i+1)|I+B(i-1)|-A(i-1)|I+B(i+1)|\}/|I+B(i)|^2,\end{aligned} \tag{6}$$

ここに $A(i)$ と行列 $B(i)$ の$(m,\ n)$要素は次式で与えられる。

$$A(i)=2\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\overline{(I+B(i))}_{nm}\times\frac{\mathrm{ch}\varkappa_m\cdot\mathrm{sh}\varkappa_n}{(\mathrm{ch}\varkappa_m+i\mathrm{sh}\varkappa_m)(\mathrm{ch}\varkappa_n-i\mathrm{sh}\varkappa_n)}\cdot e^{2x_n}, \tag{7}$$

$$(B(i))_{mn}=\frac{2\mathrm{sh}\varkappa_m\cdot\mathrm{ch}\varkappa_n}{\mathrm{sh}(\varkappa_m+\varkappa_n)}\cdot e^{2x_n}, \tag{8}$$

$$x_n=\varkappa_n\cdot i+\omega_n\cdot t+\delta_n, \tag{9}$$

ここで(7)式中の上についたバーは余因子行列をあらわし，分散関係式は未定とする。

定義式

$$(1-2u_{i-1/2}-2u_{i+1/2}+2u_{i-1/2}u_{i+1/2})^{1/2}\equiv 1+2(w_{i-1/2}-w_{i+1/2}), \tag{10}$$

を用いると，前稿の結果[1]から，w_i の形が

$$w_i=A(i)/|I+B(i)| \tag{11}$$

ではなくてはならないことがわかる。

(5)，(10)式より，w_i と u_i は

$$\dot{w}_i=-(1/2\sqrt{2})u_i \tag{12}$$

を満たさなくてはならないことがわかる。

2-ソリトン解の時以上の推測を試してみて，分散関係式を求めてみる。(7)，(8)式で $N=2$ とおくと，

$$|I+B(i)|=1+e^{2x_1}+e^{2x_2}+\left[\frac{\mathrm{sh}(\varkappa_1-\varkappa_2)}{\mathrm{sh}(\varkappa_1+\varkappa_2)}\right]^2 e^{2(x_1+x_2)}, \tag{13}$$

$$A(i)=\mathrm{th}2\varkappa_1\cdot e^{2x_1}+\mathrm{th}2\varkappa_2\cdot e^{2x_2}+\frac{2\mathrm{sh}^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}{\mathrm{ch}2\varkappa_1\cdot\mathrm{ch}2\varkappa_2\cdot\mathrm{th}(\varkappa_1+\varkappa_2)}\cdot e^{2(x_1+x_2)} \tag{14}$$

この時(6)式より u_i の表式は次のようになる。

$$u_i=N/|I+B(i)|^2, \tag{15}$$

$$N=\frac{4\mathrm{sh}^2\kappa_1}{\mathrm{ch}2\kappa_1}\cdot e^{2x_1}+\frac{4\mathrm{sh}^2\kappa_2}{\mathrm{ch}2\kappa_2}\cdot e^{2x_2}+\frac{8\mathrm{sh}^2(\kappa_1-\kappa_2)}{\mathrm{ch}2\kappa_1\cdot\mathrm{ch}2\kappa_2}\cdot e^{2(x_1+x_2)}$$

$$+\frac{4\mathrm{sh}^2\kappa_2}{\mathrm{ch}2\kappa_2}\left[\frac{\mathrm{sh}(\kappa_1-\kappa_2)}{\mathrm{sh}(\kappa_1+\kappa_2)}\right]^2\cdot e^{4x_1+2x_2}+\frac{4\mathrm{sh}^2\kappa_1}{\mathrm{ch}2\kappa_1}\left[\frac{\mathrm{sh}(\kappa_1-\kappa_2)}{\mathrm{sh}(\kappa_1+\kappa_2)}\right]^2\cdot e^{2x_1+4x_2} \tag{16}$$

(11)～(16)式を用いて(12)式の左右辺を比較すると，

$$\omega_i=-(1/2\sqrt{2})\mathrm{th}\,\kappa_i,\quad (i=1,2) \tag{17}$$

の時(12)式が恒等的に満足されることが示される。

このようにして，(2)式の2-ソリトン解が証明された。推測されたN-ソリトン解の厳密な証明は今後の課題である。

参　考　文　献

1）K. Narita：物性研究 Vol. 57，No. 4．