一次元格子気体の流体力学極限

東京工大・理学部・応物　　内山　耕平

流体力学極限の問題に関し最近 Guo-Papanicolaou-Varadhan［１］によって開発された方法は，一般性があり適用範囲が広く，様々の—今のところ stochastic な—モデルを，基本的に彼らの方法を適用することによって扱かうことができる［２－６］。ここでは舟木・半田・内山［２］の扱ったモデルの特別な場合に話を限定して，結果と証明の概略を述べる。

１° 結果. １次元有限格子｛１，２，…，N｝を周期化（k と N+k を同一視）したものを S_N とする。S_N 上に粒子が配置されており，１格子点には高々１個の粒子が存在しうるとする。粒子配置を $\eta=(\eta_x;\ x\in S_N)$，配置の全体を $\mathfrak{X}_N$ と書く：

$$\eta_x\in\{0,\ 1\},\quad x\in S_N;\quad \mathfrak{X}_N=\{0,\ 1\}^{S_N}$$

次の master 方程式によって記述される $\mathfrak{X}_N$ 上の Markov 過程 $\{\eta^N(t),\ t\geqq 0\}$ を考える：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t(\eta)=N^2L_N\mu_t^N(\eta) \tag{1}$$

但し，

$$L_Nf(\eta)\equiv\sum_{x=1}^{N}|\eta_x-\eta_{x+1}|\cdot(1+\alpha\eta_{x-1}+\alpha\eta_{x+2})\cdot[f(\eta^{x,x+1})-f(\eta)]$$

（α は $\alpha>-\dfrac{1}{2}$ なる定数，$\eta^{x,x+1}$ はその，x と $x+1$ の，値を交換して得られた粒子配置）。$\{\mu_0^N(\eta),\ \eta\in\mathfrak{X}_N\}$ を与えられた初期分布とすると，(1)の解は $\eta^N(t)$ の分布を与える。

さて $\eta^N(t)$ を微視的な物理系とみなし，その巨視的質量分布を

$$\alpha_t^N(d\theta)=\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\eta_x^N(t)\delta_{x/N}(d\theta)\qquad (\theta\in\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\cong[0,1])$$

によって定義する。テスト関数 $J\in C(\boldsymbol{T})$ を α_t^N で積分した形で書けば

$$\langle J,\ \alpha_t^N \rangle = \sum_x \eta_x^N(t) J(x/N) \frac{1}{N} \tag{2}$$

$\{\eta^N(t)\}$ は共通の確率空間（Ω, $\mathscr{F}$, $\boldsymbol{P}$）上で定義されているとし，$\boldsymbol{P}$ による平均を $\boldsymbol{E}$ で表す。次の定理が成立する。

定理．初期値 α_0^N がある関数 $\rho_0(\theta)$, $\theta \in \boldsymbol{T}$, に次の意味で収束しているとする：

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E} \left| \langle J,\ \alpha_0^N \rangle - \int_0^1 J(\theta)\rho_0(\theta) d\theta \right| = 0, \quad {}^\forall J \in C(\boldsymbol{T})$$

このとき α_t^N は，ρ_0 を初期関数とする非線型拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\rho + \alpha\rho^2) \tag{3}$$

の一意解 $\rho(t,\ \theta)$ に上と同じ意味で収束する。

2°　証明の概略．次の2つの事実は容易に確かめることができる。

A)　$$L_N\left\{\sum_{x=1}^N \eta_x J(x)\right\} = \sum_{x=1}^N h_x(\eta)\Delta J(x)$$

但し，

$$h_x(\eta) = (\alpha+1)\eta_x + \alpha(\eta_{x-1} - \eta_x)(\eta_x - \eta_{x+1})$$
$$\Delta J(x) = J(x+1) + J(x-1) - 2J(x)$$

B)（対称性，detailed balance condition）

$0 < \rho < 1$ に対し $\mathfrak{X}^N$ 上の Bernouli 測度を $\nu_{N,\rho}$ と書く：$\nu_{N,\rho}(\{\eta\}) = \rho^N$　(${}^\forall \eta \in \mathfrak{X}_N$)。$L_N$ は $\nu_{N,\rho}$ に関し対称，したがって特に $\nu_{N,\rho}$ は Markov process $\eta^N(t)$ の定常測度である。$\eta^N(t)$ は $\mathfrak{X}_{N,n} \equiv \{\eta \in \mathfrak{X}_N : \sum \eta_x = n\}$ $(n = 0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ によって Ergode 分解され，各 n について Ergodic measure は $\nu_{N,\rho}$ を $\mathfrak{X}_{N,n}$ 上に制限したものに等しい（ρ は1つ固定すれば何でもよい）。

$$\langle J,\ \alpha_t^N \rangle = \langle J,\ \alpha_0^N \rangle + \int_0^t b_N(\eta^N(s)) ds + M_N(t) \tag{4}$$

よって $M_N(t)$ を定義する，但し

$$b_N(\eta) \equiv N^2 L_N\{\langle J,\ \alpha \rangle\}$$

$$= N\sum_{x=1}^{N} h_x(\eta)\Delta J\left(\frac{x}{N}\right) \qquad \text{(A による)}$$

よく知られた公式から

$$\boldsymbol{E}M_N^2(t) = \boldsymbol{E}[\int_0^t C_N(\eta^N(s))ds] = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$C_N(\eta) = \sum_{x=1}^{N}\left(J\left(\frac{x+1}{N}\right) - J\left(\frac{x}{N}\right)\right) \times a_{x,x+1}(\eta)$$

（$a_{x,x+1}(\eta)$ は L_N の定義式に現れる係数）

特に $M_N(t) \to 0$ であるから，或る関数 $\rho(t, \theta)$ があって次の収束

$$\langle J, \alpha\rangle \longrightarrow \int J(\theta)\rho(t, \theta)d\theta \tag{5.a}$$

$$\int_0^t b_N(\eta^N(s))ds \longrightarrow \int_0^t ds\int J''(\theta)[\rho(s, \theta)+\alpha\rho^2(s, \theta)]d\theta \tag{5.b}$$

が成り立つことを示せば，(4)より

$$\int J(\theta)(\rho(t, \theta)-\rho(0, \theta))d\theta = \int_0^t ds\int J''(\theta)[\rho(s, \theta)+\alpha\rho^2(s, \theta)]d\theta$$

を得る。最後の式は $\rho(t, \theta)$ が(3)の弱解であることを意味しており，弱解の一意性から(3)の解である。従って定理が証明された。

(5)を示すために $b_N(\eta)$ を見やすい形に書き直す：まず $\Delta J(x/N) \sim N^{-2}J''(x/N)$ に注意し，さらに J'' の滑らかさを使えば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$b_N(\eta) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} J''\left(\frac{x}{N}\right)\frac{1}{2\varepsilon N+1}\sum_{|y-x|\leq\varepsilon N} h_y(\eta) + O\left(\frac{1}{N}+\varepsilon\right) \tag{6}$$

次の補題が本質的である。

補題（局所平衡）任意の局所的関数 $f(\eta)$，$\eta \in \{0, 1\}^Z$ と任意の $T > 0$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_x \boldsymbol{E}\int_0^T \left|\frac{1}{2\varepsilon N+1}\sum_{|y-x|\leq\varepsilon N} f_y(\eta^N(s)) - \langle f\rangle\left(\rho^{N,\varepsilon}(s, \frac{x}{N})\right)\right| ds = 0,$$

但し，$f_y(\eta) = f(\tau_y\eta)$（$\tau_y\eta$ は η の y だけの shift, i. e. $(\tau_y\eta)_x = \eta_{y+x}$),

$$\rho^{N,\varepsilon}(s,\ \theta)=\frac{1}{2\varepsilon N+1}\sum_{|y-[N\theta]|<\varepsilon N}\eta_y{}^N(s),$$

$$\langle f\rangle(\rho)=\int f(\eta)\nu_\rho(d\eta)\qquad\qquad(\nu_\rho \text{ は } \{0,\ 1\}^Z \text{ 上の Bernoulli 測度})$$

上の補題は，時間平均の下では我々の系に対しある種の局所平衡が成立していることを主張する。その直観的理解を得る為に x を１つ固定して考える。x の回りで平衡状態が達成されていると仮定すると，その平衡測度は ν_ρ の重ね合わせであり，$\boldsymbol{P}$ の下では ν_ρ の ρ はランダムな量であって，それは大数の法則から必然的に，$\eta^N{}_y(s)$の x の回りでの空間平均 $\rho^{N,\varepsilon}(s,\ x/N)$によって近似される；逆に $f_y(\eta^N(t))$の x の回りでの空間平均は，個別エルゴード定理より，f の ν_ρ による平均値，したがって，$\nu_{\rho^{N,\varepsilon}(s,x/N)}$ による平均値で近値されることになる。最後の結論が補題の主張するところである。

補題において $f=h$ とおけば，(6)より

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{N\to\infty}}\boldsymbol{E}\int_0^t\left|\ b_N(\eta^N(s))-\frac{1}{N}\sum J''\left(\frac{x}{N}\right)\langle h\rangle\left(\rho^{N,\varepsilon}\left(s,\ \frac{x}{N}\right)\right)\right|ds=0$$

一方（5.a）が成り立つ（compactness argument）として

$$\rho^{N,\varepsilon}(s,\ \theta)=\frac{1}{2\varepsilon}\alpha_s{}^N([\theta-\varepsilon,\ \theta+\varepsilon])\ \xrightarrow[N\to\infty]{}\ \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\rho(s,\ \theta+u)du$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\ \rho(s,\ \theta)$$

最後に

$$\langle h\rangle(\rho)=\int h(\eta)\nu_\rho(d\eta)=\rho+\alpha\rho^2$$

を確かめれば（5.b）を得る。

補題の証明は，このモデルの単純さから［１］，［２］等に比較して多少簡略化されるにしても，相等込入ったものなのでここでは省略する。

参　考　文　献

［１］ Guo, Papanicolaou and Varadhan, Nonlinear diffusion limit for a system…, Comm Math. Phy. **118** (1988), 31-59.

［２］ Funaki, Handa and Uchiyama, Hydrodynamic limit of one-dimensional exclusion…, Ann. Probab. **19** (1991), 245-265.

［３］ Kipnis, Olla, Varadhan, Hydrodynamics and large deviation…, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 115-137.

[4] Varadhan, Scaling limits for interacting diffusions, Comm. Math. Phys. **135** (1991), 313-353.

[5] Olla and Varadhan, Scaling limit for interacting Ornstein-Uhlenbeck···, Comm. Math. Phys. **135** (1991), 355-378.

[6] Suzuki and Uchiyama, Hydrodynamic limit for a spin system on multidimensional lattice, preprint.