スピングラスとその周辺

東工大 理 西森秀稔

1．スピングラス

例えば，Cu の中に数パーセント程度の Mn を一様に混ぜるとランダムな位置に配置された Mn 原子の磁気モーメントの間には距離に応じて符号が変化する RKKY 相互作用が働く．そのために生じる磁性は通常の強磁性などとは違い，場所によってスピンが平行あるいは反平行の両方の状態を取る．観測されるマクロな物理量にもその影響が出て，例えばスピン状態が凍結する転移点で比熱は明確な異常を示さないのに対して，磁化率には鋭いカスプが現れる．この転移が果たして真の熱力学的な相転移かどうかが理論的にも実験的にも興味をもたれている点である．

スピングラスでは場所によってスピンの向きが一定してないため秩序状態として様々なものが可能になる．平均場理論によると，自由エネルギーは状態の関数として多数の極小を持っている．そのことを反映して状態空間の構造はきわめて複雑であり，物理量の平衡状態への緩和も異常な長時間を要するものとなる．

一方，3 次元等の有限次元系でスピングラス相転移が安定な熱力学的な転移であるかどうか，またそうだとしてもスピングラス相が平均場理論の予言するような複雑な構造を持ったものかどうかについては最終的な合意がまだない．スピンがイジング的であるときには相転移が安定に存在することは数値的な証拠から確からしいと思われているが，きちんとした証明はない．スピングラス相がどういう性質を持つかについてはさらに不明確で，平均場の場合よりもはるかに単純であるという説と平均場と本質的に同じであるという説が対立している．ここでも基本的な問題点は，数値計算以外に系統的な研究方法がないことである．

2．ニューラルネットと統計力学

スピングラスにおけるランダムに凍結された状態とニューラルネットとの間には顕著な類似性がある．スピンの上向き，下向きをニューロンの興奮，静止の各状態に対応させ，空間的に一様でないパターンが多数のスピン（ニューロン）の集団の性質としてどのように生じるかを調べるという点で両者の間に共通点が見いだされるのである．

不完全な情報からもとの空間的なパターンを回復する自己連想記憶システムの代表的な例であるホップフィールド模型を熱平衡系の統計力学の立場から扱った話をまず紹介しよう．システムのエネルギー E がミクロな変数（各スピンの値 $\{S_i\}_i$）の関数

として与えられたとする．ホップフィールド模型ではニューロン i が興奮しているとき $S_i = 1$ とし，静止しているとき $S_i = -1$ とおいて

$$E = -\sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j \tag{1}$$

とする．ここで J_{ij} は j から i へのシナプス結合の強さで，埋め込んだパターン $\{\xi_i^\mu\}$ の次のような関数である．

$$J_{ij} = \frac{1}{N}\sum_\mu \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad (\text{Nは全ニューロン数}) \tag{2}$$

あるエネルギー E を持つミクロな状態が実現する確率は，ボルツマン因子

$$\exp(-E/T) \tag{3}$$

に比例する．T は温度（雑音の程度）を表す．(1), (2), (3) 式を合わせた系は，次の瞬間に S_i が 1 になる確率が

$$p = 1/\{1 + \exp(-h_i/T)\} \quad (h_i = \sum_j J_{ij} S_j)$$

で与えられる非同期的な（すなわち各ニューロンが勝手なタイミングで状態更新をする）ダイナミクスの平衡状態として実現される．ボルツマン因子 (3) から自由エネルギーが求まる．

$$F = -T \ln Z\ . \tag{4}$$

温度が一定のとき，系のさまざまなパラメータは自由エネルギーを最小にする値を取る．

自由エネルギーは秩序パラメータの関数になっている．ホップフィールド模型の主要な秩序パラメータは，埋め込まれたパターンのうちの特定のものに系がどれだけ近い状態にあるかを示す量

$$m_\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i \xi_i^\mu \quad (\mu = 1 ... p)$$

である．$m_\mu = 1$ ならシステムはパターン μ を完全に回復しているし，0 なら μ とは無関係（直交）の状態にある．さてランダムパターンを埋め込んだホップフィールド模型について (4) 式の計算を実行すると，自由エネルギー F は m_μ の関数として求まる．この $F(\{m_\mu\})$ は，温度 T や相対的な記憶容量 $\alpha = p/N$ を変えるとさまざまな形を取る

が，Tとαがともに十分小さいときには，特定のm_μがほとんど1で他のm_νは0であるような極小値を持つことが示される．これはμ番目のパターンを正しく記憶回復した状態である．Tとαを固定したときのシステムの運動は自由エネルギーが減少する方向へ向かうものであり，したがって極小値の有限の近傍に記憶回復状態への引き込み領域があることになる．

記憶容量αが必ずしも小さくないときには，自由エネルギーは記憶回復相以外にも多数の極小を持つ．これらの極小の近くから出発すると，もともとの埋め込んだパターンとは何の関係もない状態（スピングラス状態）に行き着いて運動は停止する．αがある値α_c以上になると埋め込んだパターンは極小でなくなり，記憶装置としては無意味なスピングラス相だけしか存在しなくなる．例えば$T=0$で$\alpha_c=0.14$である．同様の効果は，αをα_c以下に固定して温度を上げていっても見られる．

3．動的連想記憶

ダイナミクスの種類によってシステムの振舞いがどう変わるかは非平衡統計力学の問題として興味深い．平衡状態の性質についてはダイナミクスの同期性はシステムの性質に影響しないことが分かっている．これはシナプス結合J_{ij}がiとjの入れ替えについて対称になっている(2)式の特性である．結合が対称でなくなると，非同期システムは同期システムとはかなり違った性質を持つようになる．

同期的ダイナミクスによって動作する非対称結合システムでは，p個のパターン$\{\xi_i^\mu\}_i$ $(\mu=1...p)$を順次再現する動的連想記憶が次に来るべきパターンへの遷移を促進するシナプス結合

$$J_{ij}=\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_i^{\mu+1}\xi_j^\mu \tag{5}$$

によって実現できる．(5)式はひとつ前の状態$\mu-1$と次の状態$\mu+1$とを同等に取り扱わない（ξ_j^μにかかるのが$\xi_i^{\mu+1}$であって$\xi_i^{\mu-1}$でない）ことによって非対称性$J_{ij}\neq J_{ji}$を実現して動的なパターン変化を可能にしている．埋め込まれたパターンのひとつから正確に始めなくても，どれかに近い初期条件を与えると，すぐに正しいパターン系列に収束するという意味において，このシステムは動的な自己連想記憶を行う．

ダイナミクスが非同期的になると，(5)式のシナプス結合では動的連想記憶は不可能になる．ホップフィールドがシミュレーションでこのことを示して以来，非対称シナプス結合に信号伝達の遅延効果を入れない限り非同期的ダイナミクスのシステムでは動的連想記憶は出来ないと考えられてきたが，最近になって，隣接してないパターンの間にも促進，抑制の効果を取り入れたシナプス結合を採用すると遅延効果なしで

もうまくいくことがわかった．例えば，３個のパターンだと，

$$J_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu,\nu}\xi_i^{\mu}\xi_j^{\nu}A_{\mu\nu} \ ,$$

ただし

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -1 & 1 \\ 1 & \gamma & -1 \\ -1 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \qquad (\gamma < 2)$$

とするのである．

４．おわりに

スピングラスの平均場理論で見つかった複雑な構造とそれを取り扱う方法は狭い意味での物性論に留まらず，ニューラルネットその他の広い分野において重要な役割を果たしており今後さらに応用が広まっていくものと期待される．